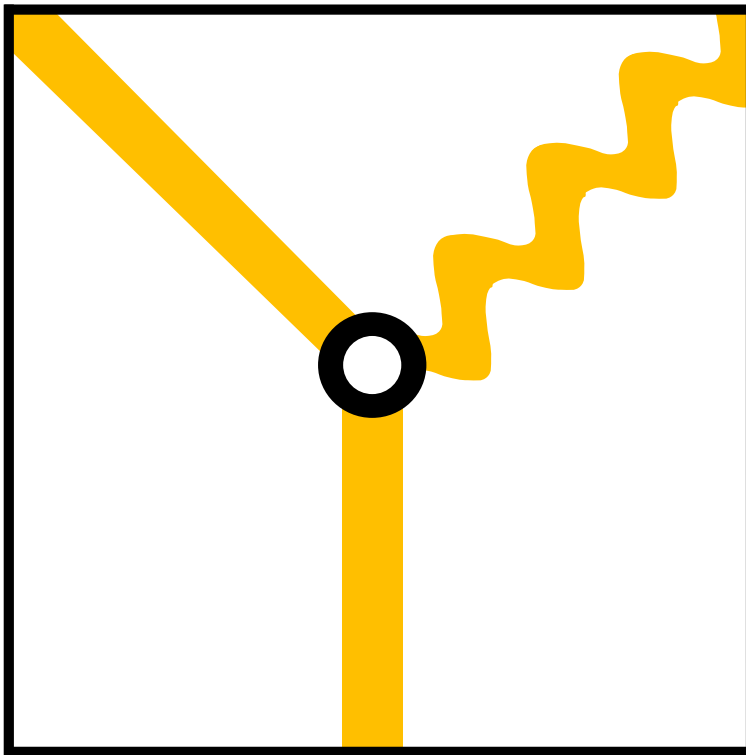


Université Paris-Sud Orsay
Master de Physique
P-F&A-452A

ÉLECTRODYNAMIQUE
CLASSIQUE ET QUANTIQUE



J.-J. LABARTHE

Année 2006-07

ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE ET QUANTIQUE

Mise à jour de ce cours sur le site
<http://qcd.th.u-psud.fr/page.perso/Van-Wijland/>

Première version : 6 septembre 2001
Cette version : 28 juillet 2006

Jean-Jacques LABARTHE

Laboratoire Aimé-Cotton

www.lac.u-psud.fr

Bât 505 CNRS II

91405 ORSAY Cedex

Tél. : 01 69 35 20 49

Fax : 01 69 35 21 00

labarthe@lac.u-psud.fr

Table des matières

1	Formulation covariante	7
1.1	Rappel d'électromagnétisme	7
1.1.1	Les lois de l'électromagnétisme	7
1.1.2	Systèmes d'unités	8
1.1.3	Potentiels	8
1.2	Principe de relativité	11
1.2.1	Invariants, écriture covariante	12
1.3	Transformations de Lorentz	13
1.4	Quadrivecteurs	15
1.5	L'intervalle	16
1.6	Quadrivitesse. Quadriimpulsion	17
1.7	Quadricourant	18
1.8	Le produit scalaire	20
1.9	Tenseurs	21
1.9.1	Vecteurs covariants ou 1-formes	21
1.9.2	Tenseurs covariants et N -formes	23
1.9.3	Produit tensoriel	23
1.9.4	Tenseurs contravariants	24
1.9.5	Tenseurs mixtes	24
1.9.6	Algèbre tensorielle	24
1.9.7	Calcul tensoriel : règles pratiques (1–4)	25
1.9.8	Applications linéaires	25
1.10	Propriétés métriques	26
1.10.1	Le tenseur métrique	26
1.10.2	Correspondance entre quadrivecteurs et 1-formes	27
1.10.3	Calcul tensoriel : règles pratiques (5)	27
1.11	Tenseur de Levi-Civita	28
1.12	Gradient	29
1.12.1	Le quadrigradient	29
1.12.2	Le d'Alembertien	30
1.12.3	Une interprétation géométrique du gradient	30
1.12.4	Représentation géométrique d'une 1-forme	30
1.13	Intégrales quadridimensionnelles	31

1.13.1	L'invariance de l'élément de volume d^4x	31
1.13.2	Fonction de Dirac quadridimensionnelle	32
1.13.3	Intégration par parties	32
1.14	Quadripotentiel	33
1.15	Tenseur du champ électromagnétique	34
1.16	Formulation covariante	36
1.16.1	Formulation en termes du quadripotentiel	38
1.17	Résumé	39
2	Lagrangien	40
2.1	Particule chargée dans un champ extérieur	40
2.1.1	Le principe de moindre action	40
2.1.2	Particule matérielle relativiste libre (en champ nul)	42
2.1.3	Particule relativiste dans un champ extérieur	43
2.1.4	Hamiltonien	44
2.2	Corde classique à une dimension	45
2.2.1	Lagrangien	45
2.2.2	Hamiltonien	47
2.3	Équations d'Euler-Lagrange champ continu	47
2.4	Lagrangien du champ électromagnétique	48
2.5	Fonctionnelle, dérivée fonctionnelle	51
3	Tenseur énergie-impulsion	56
3.1	Intégrales sur une hypersurface	56
3.1.1	Flux d'un quadrivecteur	56
3.1.2	Théorème de Gauss	57
3.1.3	Quadrivecteur de quadridivergence nulle	57
3.2	Tenseur énergie-impulsion	58
3.2.1	Interprétation physique des composantes	58
3.2.2	Décomposition $T^{\mu\nu} = T_{\text{part}}^{\mu\nu} + T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$	62
3.2.3	Tenseur énergie-impulsion d'une particule	62
3.2.4	Tenseur énergie-impulsion des particules	64
3.2.5	Tenseur énergie-impulsion du champ	65
3.2.6	Composantes de $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$	65
3.2.7	Tenseur énergie-impulsion canonique	67
3.3	Théorème de Noether	68
4	Théorie quantique du rayonnement	71
4.1	Quantification d'un oscillateur harmonique	71
4.1.1	Quantification canonique	71
4.1.2	Rappel sur l'oscillateur harmonique	73
4.1.3	Interprétation en termes de particules	74
4.1.4	Ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants	74
4.1.5	Transformation unitaire	74

4.2	Lagrangien	75
4.3	Problèmes dans la quantification	76
4.3.1	Méthode de quantification utilisée	76
4.3.2	Autre méthode	77
4.4	Élimination de ϕ , jauge de Coulomb	77
4.5	Conditions aux limites périodiques	78
4.6	Potentiel vecteur : composantes $A_{n\alpha}$	80
4.7	Hamiltonien	82
4.8	Quantification canonique	83
4.9	Modes normaux	83
4.10	Opérateurs du point de vue de Heisenberg	85
4.11	Récapitulatif des opérateurs	86
4.12	Espace des états	87
4.13	Quantité de mouvement du champ	90
4.14	Spin	91
4.15	Émission spontanée	93
4.15.1	Représentation d'interaction	93
4.15.2	Calcul du taux de transition	96
5	Théorie classique du rayonnement	99
5.1	Fonction de Green	99
5.1.1	Résolution d'équation	99
5.1.2	Fonction de Green	100
5.2	Potentiels retardés	102
5.2.1	Courant stationnaire	103
5.3	Charge ponctuelle en mouvement	103
5.3.1	Potentiels de Liénard-Wiechert	103
5.3.2	Champs \vec{E} et \vec{B}	105
5.3.3	Formule de Larmor	107
5.4	Distribution de charges quelconque	109
5.4.1	Décomposition spectrale des potentiels	109
5.4.2	Décomposition spectrale de \vec{E} et \vec{B}	109
5.4.3	Zone de rayonnement	110
5.4.4	Composante $\vec{A}_\omega(\vec{r})$	111
5.4.5	Energie rayonnée	112
5.4.6	Sources périodiques de période T	113
5.4.7	Approximation dipolaire électrique	114
6	Intégrales de chemin	117
6.1	Introduction	117
6.2	Propagateur	118
6.2.1	Définition	118
6.2.2	Équation différentielle	118
6.3	Propagateur libre	119

6.3.1	Calcul	119
6.3.2	Discussion physique	120
6.4	Loi de composition	122
6.5	Intégrale de chemin	123
6.6	Diagrammes de Feynman	125
6.6.1	Méthode perturbative	125
6.6.2	Terme d'ordre 1	126
6.6.3	Interprétation	127
6.6.4	Équation intégrale	129
A	Corrigé des exercices	131
B	Bibliographie	133
	Index	134

1

Formulation covariante

On se propose d'écrire les équations de Maxwell¹ sous forme covariante. Pour cela on présente le formalisme tensoriel après quelques rappels sur la théorie de la relativité.

1.1 Rappel d'électromagnétisme

1.1.1 Les lois de l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

Densité de charge ρ et densité de courant \vec{J} pour un ensemble de N particules (la particule i de charge q_i est située en $\vec{R}_i(t)$ et se déplace à la vitesse $\vec{V}_i(t)$ à l'instant t) :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i(t)), \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{V}_i(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i(t)). \quad (1.5)$$

L'équation de continuité (elle est vérifiée par (1.5)) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

1. James Clerk Maxwell (1831-1879)

La force de Lorentz² agissant sur la charge q de vitesse \vec{V} :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right). \quad (1.7)$$

L'état du système champ + particules chargées est déterminé, à un instant t_0 , par la donnée des champs $\vec{E}(\vec{r}, t_0)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t_0)$ en tout point \vec{r} et par les positions $\vec{R}_i(t_0)$ et vitesses $\vec{V}_i(t_0)$ des particules. Les densités de charge $\rho(\vec{r}, t_0)$ et de courant $\vec{J}(\vec{r}, t_0)$ sont alors données par l'équation (1.5). Les équations (1.2), (1.4) et les équations du mouvement pour les particules soumises aux forces (1.7) déterminent l'évolution du système au cours du temps. Les équations (1.1) et (1.3) peuvent être considérées comme des contraintes auxquelles sont soumises les variables $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et $\vec{R}_i(t)$ du système.

1.1.2 Systèmes d'unités

Ce cours utilise le système international (S.I.)³. Voici les valeurs de quelques constantes :

$$\begin{aligned} \text{permittivité électrique du vide } \epsilon_0 &= 1/\mu_0 c^2 \approx 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}; \\ \text{perméabilité magnétique du vide } \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}; \\ \text{vitesse de la lumière dans le vide } c &= 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.1.3 Potentiels

Les propriétés suivantes, pour des champs $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$, $\vec{F}(\vec{r})$ et $\phi(\vec{r})$ dans tout l'espace

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \iff & \exists \vec{A} & : & \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{F} &= 0 & \iff & \exists \phi & : & \vec{F} = -\vec{\nabla} \phi \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

3. Le système d'unités de Gauss⁴ (cgs) définit l'unité de charge de sorte que la force de Coulomb⁵ soit qq'/r^2 . Voici la forme des équations de la section 1.1 dans ce système d'unités.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \text{expressions de } \rho \text{ et } \vec{J} \text{ inchangées} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} & \text{équation de continuité inchangée} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \wedge \vec{B} \right). \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

4. Johann Karl (Carl) Friedrich Gauss (1777-1855)

5. Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

entraînent que les deux équations homogènes de Maxwell (1.3) et (1.4) sont équivalentes à l'existence d'un *potentiel vecteur* $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et d'un *potentiel scalaire* $\phi(\vec{r}, t)$ tels que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} restent inchangés dans les remplacements

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi, \quad (1.11)$$

où ψ est une fonction arbitraire de \vec{r} et t (*invariance de jauge*). La liberté sur le choix des potentiels permet de leur imposer une contrainte. Nous utiliserons soit la *jauge de Lorenz*⁶ (nommée d'après le physicien danois Lorenz qui a introduit les potentiels retardés en 1867) en imposant

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{condition de Lorenz}), \quad (1.12)$$

soit la *jauge de Coulomb* en imposant

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{condition de Coulomb}). \quad (1.13)$$

On trouve souvent écrit « jauge de Lorenz » d'après le physicien hollandais Hendrik A. Lorentz à la place de « jauge de Lorenz ». On montrera, section 1.14, que la condition de Lorenz est invariante dans les transformations de Lorentz. Montrons qu'il est possible d'imposer la condition de Coulomb (1.13). Pour cela, étant donnés \vec{A}' et ϕ' , il suffit de trouver ψ dans les équations (1.11) tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Ainsi, ψ doit vérifier

$$\Delta \psi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = f(\vec{r}, t) \quad (\text{équation de Poisson}^7) \quad (1.14)$$

dont on sait qu'une solution est

$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (1.15)$$

De même, pour montrer qu'il est toujours possible d'imposer la condition de Lorenz (1.12), il suffit de trouver ψ dans les équations (1.11) tel que

$$\square \psi = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = g(\vec{r}, t) \quad (1.16)$$

où l'opérateur

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.17)$$

6. Ludwig Valentin Lorenz (1829-1891)

7. Siméon Denis Poisson (1781-1840)

est le *d'Alembertien*⁸. On verra, section 5.1, que l'équation (1.16) admet des solutions.

En reportant les équations (1.10) dans les deux autres équations de Maxwell (1.1) et (1.2), on obtient, avec $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$ et en faisant apparaître le laplacien⁹ $\Delta\vec{A}$ par

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}, \quad (1.18)$$

$$-\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (1.19)$$

$$\square\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (\text{jauge arbitraire}). \quad (1.20)$$

Pour la jauge de Lorenz, ces équations se simplifient en

$$\square\phi = \mu_0c^2\rho \quad (1.21)$$

$$\square\vec{A} = \mu_0\vec{J} \quad (\text{jauge de Lorenz}). \quad (1.22)$$

Pour la jauge de Coulomb, les équations (1.19) et (1.20) deviennent

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.23)$$

$$\square\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (\text{jauge de Coulomb}). \quad (1.24)$$

Les équations (1.21) et (1.22) sont des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui contiennent les termes $\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$. On peut considérer que le champ électromagnétique est décrit par les potentiels \vec{A} et ϕ de jauge de Lorenz dont l'évolution au cours du temps est déterminée, par les « équations du mouvement » (1.21) et (1.22), à partir de la donnée, à un instant t_0 , des potentiels $\vec{A}(\vec{r}, t_0)$, $\phi(\vec{r}, t_0)$ et de leurs dérivées temporelles $\frac{\partial\vec{A}(\vec{r}, t_0)}{\partial t}$, $\frac{\partial\phi(\vec{r}, t_0)}{\partial t}$ en tout point \vec{r} .

Dans le cas de la jauge de Coulomb, la dérivée $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ n'apparaît pas dans l'équation (1.23). On peut alors considérer que l'état du champ est déterminé par la donnée des conditions initiales $\vec{A}(\vec{r}, t_0)$ et $\frac{\partial\vec{A}(\vec{r}, t_0)}{\partial t}$ en tout point \vec{r} . L'équation (1.23) détermine alors ϕ et l'équation (1.24) détermine l'évolution au cours du temps de \vec{A} à partir des conditions initiales.

8. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

9. Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

1.2 Principe de relativité

Le *principe de relativité* pose l'existence d'une classe particulière d'observateurs, dit *inertiels* et déclare que

si deux observateurs inertiels effectuent chacun une expérience dans les mêmes conditions, les expériences donneront les mêmes résultats. (1.25)

Le premier observateur représente les *événements*, idéalisés comme ponctuels, par des coordonnées d'espace-temps x^1, x^2, x^3, t (formant le référentiel d'inertie K) et le deuxième par x'^1, x'^2, x'^3, t' (référentiel d'inertie K'). Les lois physiques s'expriment en coordonnées de façon identique dans K et K' . L'espace-temps sera noté \mathcal{E} et les événements $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \dots$, lorsqu'on ne désire pas préciser le référentiel.

En mécanique newtonienne¹⁰ pour les référentiels d'inertie¹¹ (on dit aussi *galiléens*¹³), le mouvement d'un point matériel est décrit par la loi (cf. figures. 1.1 et 1.2)

$$m\vec{\Gamma} = \vec{F} \quad (1.26)$$

ou, en composantes,

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i \text{ dans } K \text{ et } m \frac{d^2 x'^i}{dt'^2} = F'^i \text{ dans } K'. \quad (1.27)$$

Le référentiel d'inertie K' est en mouvement uniforme de translation à la vitesse \vec{V} par rapport au référentiel d'inertie K (cf. figure 1.1). La correspondance entre les deux systèmes de référence est une *transformation galiléenne* de la forme

$$x'^i = R^i_j x^j - V^i t + a^i, \quad t' = t + t_0. \quad (1.28)$$

Les V^i sont les composantes dans K' de \vec{V} et (R^i_j) est une matrice orthogonale 3×3 (on note i, j, \dots , des indices prenant les valeurs 1, 2 et 3). L'équation (1.28) est écrite avec la *convention d'Einstein*¹⁴ (sommation sur l'indice répété j qui apparaît en indice une fois en haut et une fois en bas).

Pour le cas particulier de la transformation spéciale de la figure 1.2, les origines O et O' sont confondues à $t = t' = 0$ (*transformation galiléenne homogène*), R est l'identité (axes de K et K' parallèles) et $\vec{V} = V \vec{E}_1$ est

10. Sir Isaac Newton (1643-1727)

11. Les référentiels d'inertie se trouvent être les référentiels où les étoiles lointaines apparaissent fixes, ce qui conduit à postuler que les propriétés d'inertie résultent de la répartition des masses dans l'univers (*principe de Mach*¹²).

12. Ernst Mach (1838-1916)

13. Galileo Galilei, dit Galilée (1564-1642)

14. Albert Einstein (1879-1955)

suivant l'axe x^1 . La transformation (1.28) est

$$\begin{cases} x'^1 &= x^1 - Vt \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \\ t' &= t. \end{cases} \quad (1.29)$$

FIG. 1.1 – Transformation galiléenne entre K et K' .

FIG. 1.2 – Transformation galiléenne spéciale.

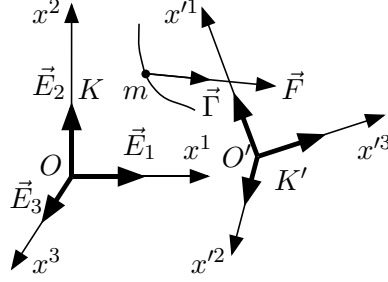


FIG. 1.1.

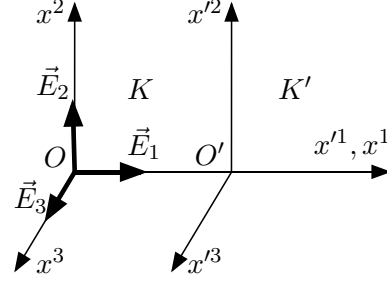


FIG. 1.2.

1.2.1 Invariants, écriture covariante

L'accélération $\vec{\Gamma}$, la force \vec{F} et la masse m qui ne dépendent pas du référentiel (nous nous limitons aux systèmes d'inertie) sont des *invariants* (*de Galilée*). Par contre les composantes de $\vec{\Gamma}$ et \vec{F} dépendent du référentiel et se transforment selon (dérivée seconde de l'équation (1.28)) :

$$\frac{d^2 x'^i}{dt^2} = R^i_j \frac{d^2 x^j}{dt^2}, \quad F'^i = R^i_j F^j. \quad (1.30)$$

Les deux membres de l'équation $m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i$ se transforment de la même façon dans le passage de K à K' . C'est la manifestation du principe de relativité (de Galilée). On dit que l'équation est écrite sous forme *covariante*.

Des difficultés apparaissent pour appliquer le principe de relativité de Galilée à l'électromagnétisme. La loi de composition des vitesses $\vec{U}' = \vec{U} - \vec{V}$, reliant les vitesses \vec{U} (dans K) et \vec{U}' (dans K') d'une particule, ne s'applique pas aux ondes électromagnétiques dans le vide : dans tous les référentiels d'inertie on mesure la même vitesse $c \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Einstein dans son article [4], *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* (1905), cite la difficulté suivante. Il considère l'interaction d'un aimant et d'un conducteur. Le courant dans le conducteur ne dépend que du mouvement relatif de l'aimant et du conducteur. Mais la description du phénomène diffère dans les deux cas où l'un ou l'autre des corps est immobile. Pour un observateur qui voit l'aimant en mouvement et le conducteur au repos, il

apparaît au voisinage de l'aimant un champ électrique (loi de Faraday¹⁵, équation (1.4)) qui engendre un courant dans le conducteur ($\vec{F} = q\vec{E}$). Pour un deuxième observateur qui voit l'aimant au repos et le conducteur en mouvement, il n'y a aucun champ électrique. Dans le conducteur, cependant, comme la charge q a une vitesse \vec{V} elle subit la force ($\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$) qui engendre les mêmes courants que dans le premier cas. L'électromagnétisme, faisait remarquer Einstein, appliqué aux corps en mouvement, conduit à des asymétries qui ne semblent pas inhérentes au phénomène.

La résolution de ces difficultés a été obtenue par Einstein dans ce même article (c'est le fameux article sur la relativité).

Il part des deux postulats :

- Le principe de relativité (1.25) s'applique.
- La vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs inertiels (c'est un *invariant (de Lorentz)*).

Les postulats d'Einstein exigent l'abandon de la notion de temps absolu et conduisent à la théorie de la relativité (restreinte). Dans ce cadre, le principe (1.25) s'appelle *principe de relativité d'Einstein*. Tous les référentiels K, K', \dots , utilisés par la suite seront d'inertie. Ils se déplacent tous à une vitesse constante *strictement* inférieure à c par rapport à l'un quelconque d'entre-eux.

1.3 Transformations de Lorentz

La correspondance entre les deux systèmes d'inertie K et K' (figure 1.1) est donnée par une *transformation de Lorentz inhomogène* (ou *transformation de Poincaré*¹⁶)

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}.} \quad (1.31)$$

On a posé $x^0 = ct$, $x'^0 = ct'$. On note μ, ν, \dots , des indices prenant les valeurs 0, 1, 2 et 3. L'ensemble des transformations (1.31) forme le *groupe de symétrie de Lorentz* de la relativité restreinte.

L'événement \mathcal{O} (de coordonnées $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (0, 0, 0, 0)$ dans K) a pour coordonnées $a^{\mu} = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ dans K' . Lorsque $a^{\mu} = 0$, les événements \mathcal{O} et \mathcal{O}' (de coordonnées $x'^{\mu} = (0, 0, 0, 0)$ dans K') sont confondus (*transformation de Lorentz homogène*).

Dans des équations comme (1.31) on peut changer les noms des indices et écrire par exemple $x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\rho} x^{\rho} + a^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\lambda} x^{\lambda} + a^{\nu}$.

Nous n'utiliserons que des transformations telles qu'il existe une suite de référentiels $K(s)$ pour $s \in [0, 1]$ qui permet de passer continûment du référentiel $K = K(0)$ au référentiel $K' = K(1)$. Exemples de transformations

15. Michael Faraday (1791-1867)

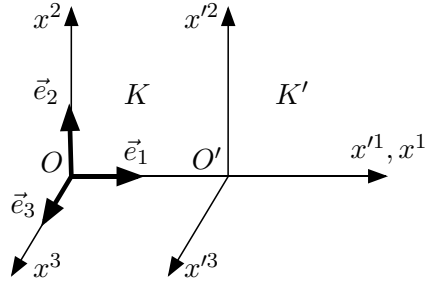
16. Jules Henri Poincaré (1854-1912)

ne vérifiant pas cette condition : l'inversion spatiale, l'inversion du sens du temps.

Dans la transformation de Lorentz spéciale (cf. figure 1.3) les axes de K et K' sont parallèles et K' se déplace parallèlement à l'axe x^1 avec la vitesse V par rapport à K . Les événements \mathcal{O} et \mathcal{O}' sont confondus. On pose

$$\boxed{\beta = \frac{V}{c}} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}. \quad (1.32)$$

FIG. 1.3 – Transformation de Lorentz spéciale.



La transformation de Lorentz spéciale s'écrit

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (1.33)$$

ou

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

sous forme matricielle. Dans la limite $V \ll c$, $\beta \ll 1$ et $\gamma \approx 1$, on retrouve la transformation galiléenne (1.29).

En général, la matrice $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ dépend de 6 paramètres (la vitesse \vec{V} et 3 paramètres pour les orientations relatives des axes). Lorsque les axes de K et K' sont parallèles, la matrice ne dépend que de \vec{V} et son inverse correspond à la vitesse opposée : $[\Lambda(\vec{V})]^{-1} = \Lambda(-\vec{V})$. Par exemple l'inverse des équations (1.33) et (1.34) s'écrit

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1) \\ x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{cases} \quad (1.35)$$

et

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^{-1}} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

On peut obtenir la transformation générale (1.31) en composant une rotation-translation spatiale (qui laisse le temps inchangé), une transformation spéciale et une deuxième rotation-translation spatiale : utiliser deux référentiels K_1 (immobile par rapport à K) et K'_1 (immobile par rapport à K'), d'axes parallèles et tels que \vec{V} soit parallèle à l'axe 1 de coordonnées.

1.4 Quadrivecteurs

Considérons le déplacement $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$ de l'événement \mathcal{A} (de coordonnées x^μ dans K et x'^μ dans K') à l'événement \mathcal{B} (de coordonnées y^μ dans K et y'^μ dans K'). Ses composantes $\Delta x^\mu = y^\mu - x^\mu$ dans K et $\Delta x'^\mu = y'^\mu - x'^\mu$ dans K' sont liées d'après l'équation (1.31) par

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu. \quad (1.37)$$

On peut noter que si K'' est un troisième référentiel d'inertie, la matrice $\Lambda(K \rightarrow K')$, intervenant dans la transformation (1.37), et les matrices analogues $\Lambda(K \rightarrow K'')$ et $\Lambda(K' \rightarrow K'')$ vérifient

$$\Lambda(K \rightarrow K'')^\mu{}_\nu = \Lambda(K' \rightarrow K'')^\mu{}_\rho \Lambda(K \rightarrow K')^\rho{}_\nu. \quad (1.38)$$

En effet, les relations $\Delta x''^\mu = \Lambda(K' \rightarrow K'')^\mu{}_\rho \Delta x'^\rho = \Lambda(K' \rightarrow K'')^\mu{}_\rho \Lambda(K \rightarrow K')^\rho{}_\nu \Delta x^\nu$ et $\Delta x''^\mu = \Lambda(K \rightarrow K'')^\mu{}_\nu \Delta x^\nu$ donnent $[\Lambda(K \rightarrow K'')^\mu{}_\nu - \Lambda(K' \rightarrow K'')^\mu{}_\rho \Lambda(K \rightarrow K')^\rho{}_\nu] \Delta x^\nu = 0$ qui doit être vrai pour tout Δx^ν .

Plusieurs grandeurs physiques se transforment entre référentiels d'inertie de la même façon que les composantes $\Delta x'^\mu$ du déplacement $\overrightarrow{\mathcal{AB}}$. Cela amène à définir un *quadrivecteur* (autres noms : *4-vecteur*, *vecteur contravariant* ou simplement *vecteur*) comme étant un objet \vec{a} invariant (indépendant du référentiel) et égal, l'unité de mesure mise à part, à un déplacement. Le quadrivecteur \vec{a} a donc 4 composantes (a^0, a^1, a^2, a^3) dans le référentiel d'inertie K . Nous écrirons $\vec{a} = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ ou $\vec{a} = (a^0, \vec{A})$ (dans K). Dans un autre référentiel d'inertie K' , ses composantes (a'^0, a'^1, a'^2, a'^3) sont

$$\boxed{a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu} \quad (1.39)$$

où Λ est la matrice intervenant dans la transformation (1.31).

L'ensemble \mathbf{V} des quadrivecteurs est muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension 4. On peut utiliser pour base de cet espace vectoriel les 4 quadrivecteurs (*tétrade*) définis par leurs composantes dans K

$$\begin{aligned}\vec{e}_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \vec{e}_1 &= (0, 1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 0, 1).\end{aligned}\tag{1.40}$$

Autrement écrit : $(\vec{e}_\mu)^\nu = \delta_\mu^\nu$, en notant $(\vec{e}_\mu)^\nu$ les composantes dans K de \vec{e}_μ et

$$\delta_\mu^\nu = \delta^\nu_\mu = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{delta de Kronecker}^{17}). \tag{1.41}$$

Le quadrivecteur \vec{a} s'écrit alors

$$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu = a'^\mu \vec{e}'_\mu, \tag{1.42}$$

où la tétrade \vec{e}'_μ est définie par rapport au référentiel K' . Déterminons la transformation des vecteurs de base. Portons l'équation (1.39) dans l'équation (1.42) : $a^\mu \vec{e}_\mu = \Lambda^\mu_\nu a'^\nu \vec{e}'_\nu$; renommons les indices muets du deuxième membre : $a^\mu \vec{e}_\mu = \Lambda^\nu_\mu a'^\mu \vec{e}'_\nu$ soit $a^\mu (\vec{e}_\mu - \Lambda^\nu_\mu \vec{e}'_\nu) = 0$; comme les a^μ sont arbitraires on obtient $\vec{e}_\mu = \Lambda^\nu_\mu \vec{e}'_\nu$ et, en inversant, (cf. figure 1.4)

$$\vec{e}'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \vec{e}_\nu. \tag{1.43}$$

Pour la transformation de la figure 1.3, avec $\beta = 3/5$, $\gamma = 5/4$, l'équation (1.43) donne, la matrice inverse Λ^{-1} étant donnée par l'équation (1.36),

$$\begin{aligned}\vec{e}'_0 &= \vec{e}_0(\Lambda^{-1})^0_0 + \vec{e}_1(\Lambda^{-1})^1_0 = \gamma \vec{e}_0 + \beta\gamma \vec{e}_1 = \frac{5}{4}\vec{e}_0 + \frac{3}{4}\vec{e}_1 \\ \vec{e}'_1 &= \vec{e}_0(\Lambda^{-1})^0_1 + \vec{e}_1(\Lambda^{-1})^1_1 = \beta\gamma \vec{e}_0 + \gamma \vec{e}_1 = \frac{3}{4}\vec{e}_0 + \frac{5}{4}\vec{e}_1.\end{aligned}\tag{1.44}$$

1.5 L'intervalle

L'*intervalle* du déplacement $\overrightarrow{\mathcal{AB}} = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (c\Delta t, \overrightarrow{\Delta r})$ est

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta r)^2. \tag{1.45}$$

L'intervalle ne dépend pas du référentiel : c'est une propriété des transformations (1.37). On peut le vérifier à l'aide des équations (1.34) pour les

17. Leopold Kronecker (1823-1891)

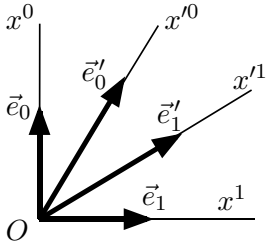


FIG. 1.4 – Un exemple de l'équation (1.43).

transformations spéciales. Dans le cas d'une rotation-traduction spatiale la propriété résulte des invariances séparées de Δt et Δr .

On distingue trois cas (cf. figure 1.5) :

- $(\Delta s)^2 = 0$ (*intervalle nul*) : les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} peuvent être reliés par un rayon lumineux. Les événements \mathcal{B} sont sur le *cône de lumière* (indépendant du référentiel) de l'événement \mathcal{A} . Exemple : déplacement $\overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}_0}$.
- $(\Delta s)^2 > 0$ (*intervalle de genre temps*) : les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} peuvent être occupés par un même point matériel. Les événements \mathcal{B} sont à l'intérieur (futur ou passé) du cône de lumière de l'événement \mathcal{A} . Exemple : déplacement $\overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}_+}$.
- $(\Delta s)^2 < 0$ (*intervalle de genre espace*) : Les événements \mathcal{B} sont à l'extérieur du cône de lumière de l'événement \mathcal{A} . Exemple : déplacement $\overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}_-}$.

La figure 1.5 représente l'espace-temps avec une dimension spatiale supprimée. Le cône de lumière de l'événement \mathcal{A} est une hypersurface qui sépare l'espace-temps en trois régions futur, passé et ailleurs. La *ligne d'univers* d'un point matériel de masse $\neq 0$ coupe le cône de lumière de \mathcal{A} en exactement deux événements \mathcal{C} , dans le passé de \mathcal{A} , et \mathcal{D} , dans le futur de \mathcal{A} (si la ligne d'univers passe par \mathcal{A} ces deux événements se confondent en \mathcal{A}).

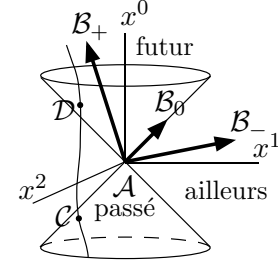


FIG. 1.5 – Intervalles de genre temps, nul et espace.

1.6 Quadrivitesse. Quadriimpulsion

Considérons une particule de masse $m \neq 0$ en mouvement accéléré. Soit K' un référentiel d'inertie, *comobile* à un instant t avec la particule, c'est-à-dire en mouvement par rapport à K avec la vitesse $\vec{V} = \overrightarrow{dr}/dt$ de la particule. Pendant le temps dt les coordonnées x^i de la particule sont fixes dans K' à des infiniments petits d'ordre 2 en dt près. L'intervalle entre les deux événements \mathcal{A} (particule à l'instant t) et \mathcal{B} (particule à l'instant $t + dt$) est

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (cdt')^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= (cdt)^2 - dr^2 = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (cdt)^2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

La variation de *temps propre* de \mathcal{A} à \mathcal{B} est $d\tau = dt' = ds/c = dt/\gamma$. Posons $\overrightarrow{d\mathcal{A}} = \overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. La *quadrivitesse* de la particule à l'instant t est le quadrivecteur $\vec{u} = \frac{d\overrightarrow{\mathcal{A}}}{d\tau} = c\vec{e}'_0$: ses composantes sont $(c, 0, 0, 0)$ dans un référentiel comobile et

$$\boxed{\frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \overrightarrow{dr}\right) = (\gamma c, \gamma \vec{V})} \quad \text{dans } K. \quad (1.47)$$

La *quadriimpulsion* de la particule est

$$\vec{p} = m\vec{u} \quad \text{de composantes} \quad \left(\frac{W}{c}, \vec{P} \right). \quad (1.48)$$

L'énergie W et la quantité de mouvement (ou impulsion) \vec{P} dépendent du référentiel mais pas la quadriimpulsion \vec{p} . La quadriimpulsion d'une particule peut varier au cours du temps. Toutefois, si la particule est isolée, il y a conservation de la quadriimpulsion et la ligne d'univers est une droite. Pour un système quelconque isolé il y a conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement : on peut définir la quadriimpulsion du système qui est invariante et conservée. Mais comment ? Pour deux particules a et b en interaction, dont les quadriimpulsions $\vec{p}_a(t)$ et $\vec{p}_b(t)$ dépendent du temps, est-ce la somme $\vec{p}_a(t) + \vec{p}_b(t)$ qui change de forme dans un autre référentiel (elle devient $\vec{p}_a(t'_a) + \vec{p}_b(t'_b)$, où les temps des deux particules peuvent être différents $t'_a \neq t'_b$) ? On répondra à la section 3.2.

Pour une particule de masse nulle (photon), on ne peut plus définir la quadrivitesse ($ds = 0$, il n'existe pas de référentiel comobile) ; on peut définir la quadriimpulsion d'un photon de fréquence ν dans K par $\vec{p} = (P, \vec{P})$ où $P = \frac{h\nu}{c}$.

1.7 Quadricourant

Considérons, dans K , à l'instant t , un petit volume Ω , centré en $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$, contenant des particules chargées de charge totale Δq qui se déplacent toutes avec la même vitesse \vec{V} . On définit la *densité de charge* en \mathcal{M} (\mathcal{M} est l'événement : temps t , position \vec{r} dans K)

$$\rho(\mathcal{M}) = \rho(\vec{r}, t) = \frac{\Delta q}{\Omega} \quad (1.49)$$

et la *densité de courant* $\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho\vec{V}$ (la charge qui traverse l'élément de surface $\Delta x^2 \Delta x^3$ pendant le temps Δt est $J^1 \Delta x^2 \Delta x^3 \Delta t$). La charge Δq de ces particules est un invariant, mais comme le volume qu'elles occupent et leur vitesse dépendent du référentiel, ρ et \vec{J} ne sont pas invariants.

Soit K' un référentiel comobile avec les particules. Le volume $\Omega = \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$, immobile dans K' , est en mouvement avec la vitesse \vec{V} dans K . Il y subit la contraction de Lorentz-FitzGerald¹⁸ (cf. figure 1.6)

$$\Omega = \frac{\Omega'}{\gamma} \quad (1.50)$$

où $\Omega' = \Delta x'^1 \Delta x'^2 \Delta x'^3$ est le volume au repos. Dans le référentiel comobile K' , la densité de charge en \mathcal{M} est

$$\rho_0(\mathcal{M}) = \frac{\Delta q}{\Omega'}. \quad (1.51)$$

18. George Francis FitzGerald (1851-1901)

D'après les équations (1.49), (1.50) et (1.51), il vient

$$\rho(\mathcal{M}) = \gamma\rho_0(\mathcal{M}). \quad (1.52)$$

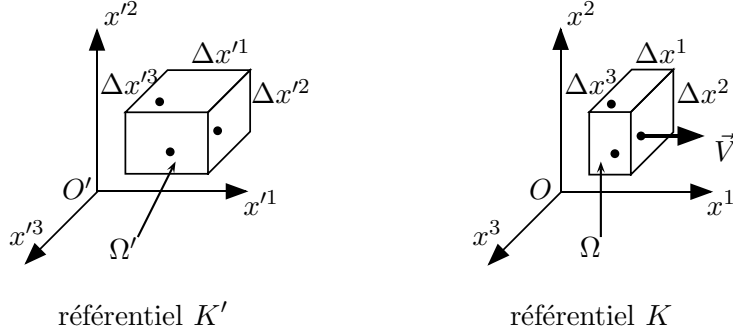


FIG. 1.6 – Contraction de Lorentz-FitzGerald.

Désignons par \vec{u} la quadrivitesse d'une des particules en \mathcal{M} . Le *quadricourant* est

$$\boxed{\vec{j}(\mathcal{M}) = \rho_0\vec{u}.} \quad (1.53)$$

Le nom est justifié par le fait que ses composantes dans K sont

$$(j^\mu) = (\rho_0\gamma c, \rho_0\gamma\vec{V})$$

soit

$$\boxed{(j^\mu) = (\rho c, \vec{J})} \quad (\text{quadricourant}). \quad (1.54)$$

Le quadricourant et la quadrivitesse en \mathcal{M} sont tangents aux lignes d'univers lorsque les particules chargées se déplacent toutes avec la même vitesse (cf. figure 1.7).

Pour une charge ponctuelle q en mouvement, de coordonnées $\xi^0 = ct$ et $\vec{\xi}(t)$, la densité de charge est $\rho = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t))$ et le quadricourant

$$\boxed{j^\mu(\vec{r}, t) = q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) \frac{d\xi^\mu}{dt}.} \quad (1.55)$$

Le quadricourant est un *champ de quadrivecteurs*. On obtient les composantes dans K' d'un champ de quadrivecteurs $\vec{a}(\mathcal{M})$ à partir des composantes dans K par

$$\boxed{a'^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu(x^0, x^1, x^2, x^3)} \quad (1.56)$$

et en exprimant x^0, x^1, x^2, x^3 en fonction de x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 par l'inverse de l'équation (1.31).

Lorsque toutes les charges ne se déplacent pas de concert, le quadricourant est défini par additivité, comme dans l'équation (1.5). Le formalisme

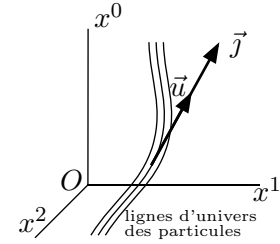


FIG. 1.7 – Quadricourant et quadrivitesse.

quadrimensionnel apporte des simplifications : ρ et \vec{J} qui dépendent du référentiel sont unifiés dans un invariant \vec{j} ; de même l'énergie E et la quantité de mouvement \vec{P} sont unifiées dans la quadriimpulsion.

1.8 Le produit scalaire

D'après l'invariance de l'intervalle (1.45) et la définition d'un quadrivecteur, le *carré*

$$\boxed{(\vec{a})^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2} \quad (1.57)$$

d'un quadrivecteur \vec{a} est un invariant. Exemples : $(\vec{u})^2 = c^2$; $(\vec{p})^2 = (mc)^2$ donne $W^2 - c^2(\vec{P})^2 = m^2c^4$; pour un photon $(\vec{p})^2 = 0$ ($E = cP$).

Le *produit scalaire* de deux quadrivecteurs \vec{a} et \vec{b} est également un invariant¹⁹ :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3.} \quad (1.58)$$

Exemple : les produits scalaires des vecteurs de la tétrade (1.40) sont $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}$ où les 16 valeurs $g_{\mu\nu}$ forment la matrice G

$$\boxed{(g_{\mu\nu}) = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad \text{(tenseur métrique).} \quad (1.59)$$

La base est *orthonormée* (vecteurs mutuellement orthogonaux et de carrés ± 1). Le symbole $g^{\mu\nu}$, défini par la même matrice G

$$\boxed{(g^{\mu\nu}) = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}, \quad (1.60)$$

joue le rôle de l'inverse de $g_{\mu\nu}$: $G^{-1} = G$ ou

$$\boxed{g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho.} \quad (1.61)$$

L'espace-temps \mathcal{E} muni de la métrique (1.59) est appelé *espace de Minkowski*²⁰.

19. Cette invariance résulte de celle du carré par la relation $\vec{a} \cdot \vec{b} = [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2]/2$.

20. Hermann Minkowski (1864-1909)

1.9 Tenseurs

Dans cette section nous définissons les tenseurs de l'espace vectoriel \mathbf{V} de dimension 4. Ces définitions s'appliquent en fait à tout espace vectoriel, même non muni d'un produit scalaire. Les définitions sont indépendantes de la base de \mathbf{V} , ce qui assurera l'invariance de Lorentz des tenseurs. Toutefois, en pratique, on utilise les composantes des tenseurs qui dépendent du référentiel.

1.9.1 Vecteurs covariants ou 1-formes

L'espace dual d'un espace vectoriel intervient souvent en physique. En mécanique quantique, les vecteurs sont les kets et les vecteurs de l'espace dual les bras. Une *1-forme* \mathbf{f} (d'autres noms usuels sont *forme linéaire*, *covecteur*, *bra*, et, en relativité, *vecteur covariant*) est une fonction complexe $\mathbf{f}(\vec{a})$ linéaire d'un (quadri)vecteur \vec{a} . Cette définition est indépendante du référentiel : une 1-forme est un invariant. L'ensemble des 1-formes constituent, avec les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire des fonctions, l'espace vectoriel \mathbf{V}^* appelé dual de \mathbf{V} . Cette structure est mise en évidence par la notation bra-ket $\mathbf{f}(\vec{a}) = \langle \mathbf{f} | \vec{a} \rangle$ qui est bilinéaire en \mathbf{f} et \vec{a} :

$$\begin{aligned} \langle \xi \mathbf{f} + \eta \mathbf{g} | \vec{a} \rangle &= \xi \langle \mathbf{f} | \vec{a} \rangle + \eta \langle \mathbf{g} | \vec{a} \rangle \\ \langle \mathbf{f} | \xi \vec{a} + \eta \vec{b} \rangle &= \xi \langle \mathbf{f} | \vec{a} \rangle + \eta \langle \mathbf{f} | \vec{b} \rangle \end{aligned} \quad (1.62)$$

pour $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{V}^*$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ et ξ, η nombres complexes (diffère de la mécanique quantique où le bra-ket est sesquilinéaire).

Les quatre 1-formes \mathbf{e}^μ définies par

$$\langle \mathbf{e}^\mu | \vec{e}_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu \quad (1.63)$$

agissent sur $\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$ par

$$\langle \mathbf{e}^\mu | \vec{a} \rangle = a^\mu. \quad (1.64)$$

Elles forment une base de \mathbf{V}^* (*base duale* de la tétrade \vec{e}_ν). En effet, pour une 1-forme $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$, posant

$$f_\mu = \langle \mathbf{f} | \vec{e}_\mu \rangle, \quad \text{que nous appellerons } \textit{composantes} \text{ de } \mathbf{f} \text{ dans } K, \quad (1.65)$$

on a $\langle \mathbf{f} | \vec{e}_\nu \rangle = \langle f_\mu \mathbf{e}^\mu | \vec{e}_\nu \rangle$ et $\langle \mathbf{f} | \vec{a} \rangle = \langle f_\mu \mathbf{e}^\mu | \vec{a} \rangle \forall \vec{a} \in \mathbf{V}$. Cela montre que les quatre 1-formes indépendantes \mathbf{e}^μ forment une base puisque toute \mathbf{f} s'exprime comme $\mathbf{f} = f_\mu \mathbf{e}^\mu$.

On peut comparer les expressions

$$\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu = \vec{e}_\mu \langle \mathbf{e}^\mu | \vec{a} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = f_\mu \mathbf{e}^\mu = \langle \mathbf{f} | \vec{e}_\mu \rangle \mathbf{e}^\mu \quad (1.66)$$

avec les expressions de la mécanique quantique

$$|a\rangle = \sum_n a_n |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n| a\rangle \quad \text{et} \quad \langle f| = \sum_n f_n \langle n| = \sum_n \langle f| n\rangle \langle n| \quad (1.67)$$

où $|n\rangle$ est une base d'états.

Si $\vec{a} = a^\mu \vec{e}_\mu$, $\langle \mathbf{f} | \vec{a} \rangle$ s'exprime par la *contraction* de \mathbf{f} et \vec{a} :

$$\boxed{\langle \mathbf{f} | \vec{a} \rangle = f_\mu a^\mu = f_0 a^0 + f_1 a^1 + f_2 a^2 + f_3 a^3.} \quad (1.68)$$

Ne pas confondre la contraction (tous les signes sont +) avec l'expression (1.58).

Rappelons les formules (1.39) et (1.43) de changement de base²¹ pour les composantes des vecteurs et les tétrades de \mathbf{V} :

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu, \quad (1.69)$$

$$\vec{e}'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \vec{e}_\nu. \quad (1.70)$$

La formule de changement de base pour les composantes des 1-formes s'obtient en portant l'équation (1.70) dans la définition des composantes (1.65), écrite dans K' , $f'_\mu = \langle \mathbf{f} | \vec{e}'_\mu \rangle$:

$$\boxed{f'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu f_\nu.} \quad (1.71)$$

La transformation des tétrades de \mathbf{V}^* peut s'obtenir²² en écrivant l'équation (1.69) sous la forme $\langle \mathbf{e}'^\mu | \vec{a} \rangle = \Lambda^\mu{}_\nu \langle \mathbf{e}^\nu | \vec{a} \rangle$:

$$\boxed{\mathbf{e}'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \mathbf{e}^\nu.} \quad (1.72)$$

Les noms covariant et contravariant sont donnés par comparaison aux formules de changement de base des \vec{e}_μ . Le « vecteur covariant » f_μ se transforme **comme** \vec{e}_μ , et le « vecteur contravariant » a^μ se transforme de façon **contraire**. Les indices en haut (en bas) sont qualifiés de même de contravariants (covariants).

La notation bra-ket met en évidence que le dual de \mathbf{V}^* (*bidual* de \mathbf{V}) redonne \mathbf{V} . Autrement dit, une fonction complexe $a(\mathbf{c})$ linéaire du covecteur $\mathbf{c} \in \mathbf{V}^*$ peut s'écrire comme un bra-ket $a(\mathbf{c}) = \langle \mathbf{c} | \vec{a} \rangle$ et s'identifie au quadrivecteur $\vec{a} = a(\mathbf{e}^\mu) \vec{e}_\mu$.

21. Nous nous limitons aux changements de bases entre référentiels d'inertie, mais dans cette section, tout reste valable pour des changements de bases quelconques (Λ étant alors n'importe quelle matrice 4×4 inversible).

22. On peut aussi partir de $\mathbf{f} = f_\mu \mathbf{e}^\mu = f'_\mu \mathbf{e}'^\mu$ et procéder comme dans la démonstration de l'équation (1.43).

1.9.2 Tenseurs covariants et N -formes

Un *tenseur* \mathbf{T} de type $\binom{0}{N}$ est une fonction complexe $\mathbf{T}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N)$ multilinéaire de N quadrivecteurs. Cette définition est indépendante du référentiel : un tenseur est un invariant. Les tenseurs de type $\binom{0}{0}$ sont les scalaires (c, m, \dots). Les tenseurs de type $\binom{0}{1}$ sont les 1-formes.

En pratique, on utilise les *composantes du tenseur* dans un référentiel K . Ce sont les 4^N nombres $T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} = \mathbf{T}(\vec{e}_{\mu_1}, \vec{e}_{\mu_2}, \dots, \vec{e}_{\mu_N})$. Les composantes dans le référentiel K' sont données par $T'_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} = \mathbf{T}(\vec{e}'_{\mu_1}, \vec{e}'_{\mu_2}, \dots, \vec{e}'_{\mu_N})$. En y portant l'équation (1.70), $\vec{e}'_{\mu_k} = (\Lambda^{-1})^{\nu_k}_{\mu_k} \vec{e}_{\nu_k}$, et en utilisant la multilinéarité de \mathbf{T} on obtient la loi de transformation des composantes

$$T'_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} = (\Lambda^{-1})^{\nu_1}_{\mu_1} (\Lambda^{-1})^{\nu_2}_{\mu_2} \times \dots \times (\Lambda^{-1})^{\nu_N}_{\mu_N} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N}. \quad (1.73)$$

Pour un tenseur \mathbf{T} de type $\binom{0}{2}$ et deux vecteurs $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$ et $\vec{v} = v^\nu \vec{e}_\nu$, $\mathbf{T}(\vec{u}, \vec{v})$ s'exprime par la double contraction :

$$\mathbf{T}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{T}(u^\mu \vec{e}_\mu, v^\nu \vec{e}_\nu) = \mathbf{T}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) u^\mu v^\nu = T_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \quad (1.74)$$

Si $\mathbf{T}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{T}(\vec{v}, \vec{u})$ (resp. $\mathbf{T}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathbf{T}(\vec{v}, \vec{u})$) pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$ alors $T_{\rho\sigma} = T_{\sigma\rho}$ (resp. $T_{\rho\sigma} = -T_{\sigma\rho}$) et le tenseur $T_{\rho\sigma}$ est dit *symétrique* (resp. *antisymétrique*). Une N -forme est un tenseur de type $\binom{0}{N}$ complètement antisymétrique ($T_{\mu\nu\rho\sigma\dots} = -T_{\nu\mu\rho\sigma\dots} = -T_{\rho\nu\mu\sigma\dots} = \dots$).

1.9.3 Produit tensoriel

Le produit tensoriel d'espaces vectoriels intervient en mécanique quantique. Ainsi, l'espace \mathcal{S} des états de deux spins s_1 et s_2 est le produit tensoriel $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ des espaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 de chaque spin. Une base de \mathcal{S} est donnée par les produits tensoriels $|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle = |s_1 m_1\rangle \otimes |s_2 m_2\rangle$ des vecteurs de base de \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 .

Le *produit tensoriel* de deux 1-formes \mathbf{p} et \mathbf{q} est le tenseur $\mathbf{T} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}$ de type $\binom{0}{2}$ défini par $\mathbf{T}(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \mathbf{p} | \vec{u} \rangle \langle \mathbf{q} | \vec{v} \rangle$ (où $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$) soit, en composantes, $T_{\mu\nu} = p_\mu q_\nu$. Le produit tensoriel n'est pas commutatif en général ($\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$). L'espace des tenseurs de type $\binom{0}{2}$ est le produit tensoriel $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^*$. Une base de cet espace est donnée par les 16 produits tensoriels $\mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu$ et les composantes $T_{\mu\nu}$ d'un tenseur \mathbf{T} sont en fait les composantes dans cette base tensorielle : $\mathbf{T} = T_{\mu\nu} \mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu$ puisque $T_{\mu\nu} \mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu (\vec{u}, \vec{v}) = T_{\mu\nu} \langle \mathbf{e}^\mu | \vec{u} \rangle \langle \mathbf{e}^\nu | \vec{v} \rangle = T_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$.

Le produit tensoriel de N 1-formes donne de même un tenseur de type $\binom{0}{N}$.

L'espace des tenseurs de type $\binom{0}{N}$ est le produit tensoriel $\underbrace{\mathbf{V}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{V}^*}_{N \text{ facteurs}}$.

1.9.4 Tenseurs contravariants

Un *tenseur* \mathbf{T} de type $\binom{M}{0}$ est une fonction complexe $\mathbf{T}(\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \dots, \mathbf{f}^M)$ multilinéaire de M covecteurs. Les composantes du tenseur dans K sont les 4^M nombres

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M} = \mathbf{T}(\mathbf{e}^{\mu_1}, \mathbf{e}^{\mu_2}, \dots, \mathbf{e}^{\mu_M}).$$

Les composantes dans le référentiel K' sont données par

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M} = \mathbf{T}(\mathbf{e}'^{\mu_1}, \mathbf{e}'^{\mu_2}, \dots, \mathbf{e}'^{\mu_M}).$$

En y portant l'équation (1.72), $\mathbf{e}'^{\mu_k} = \Lambda^{\mu_k}_{\nu_k} \mathbf{e}^{\nu_k}$, on obtient la loi de transformation des composantes

$$\boxed{T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \times \dots \times \Lambda^{\mu_M}_{\nu_M} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_M}.} \quad (1.75)$$

D'après la remarque de la fin de la section 1.9.1, les tenseurs de type $\binom{1}{0}$ sont les quadrivercteurs. Dans ce cas, l'équation (1.75) redonne l'équation (1.69). Les tenseurs de type $\binom{M}{0}$ sont les éléments du produit tensoriel $\underbrace{\mathbf{V} \otimes \dots \otimes \mathbf{V}}_{M \text{ facteurs}}$.

1.9.5 Tenseurs mixtes

On généralise les définitions des sections 1.9.2 et 1.9.4. Un *tenseur* \mathbf{T} de type $\binom{M}{N}$ est une fonction complexe multilinéaire de N vecteurs et M covecteurs. Suivant l'ordre des vecteurs et covecteurs, il y a $\frac{(M+N)!}{M!N!}$ sortes de tenseurs de type $\binom{M}{N}$. Ainsi il y a trois sortes de tenseurs de type $\binom{1}{2}$: $\mathbf{R}(\mathbf{f}, \vec{a}, \vec{b})$, $\mathbf{S}(\vec{a}, \mathbf{f}, \vec{b})$, et $\mathbf{T}(\vec{a}, \vec{b}, \mathbf{f})$ ($\mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$). Les 64 composantes dans K de chacun de ces tenseurs sont $R^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{R}(\mathbf{e}^\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_\gamma)$, $S_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{S}(\vec{e}_\alpha, \mathbf{e}^\beta, \vec{e}_\gamma)$ et $T_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{T}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \mathbf{e}^\gamma)$. La loi de transformation des composantes généralise les lois (1.73) et (1.75). Ainsi, pour le tenseur de composantes $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ de type $\binom{1}{3}$, c'est

$$\boxed{R'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta} (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\gamma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\delta} R^{\mu\nu\rho\sigma}.} \quad (1.76)$$

1.9.6 Algèbre tensorielle

La somme directe des espaces vectoriels

$$\mathbf{C} \oplus \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^* \oplus (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \oplus (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*) \oplus (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}) \oplus \dots,$$

où \mathbf{C} est l'ensemble des nombres complexes, munie du produit tensoriel forme l'algèbre tensorielle de \mathbf{V} . L'expression mathématique $(1 + \vec{a}) \otimes \vec{a}$ (où $\vec{a} \in \mathbf{V}$) n'a pas de sens physique : on utilisera seulement des expressions comportant des tenseurs de même type.

1.9.7 Calcul tensoriel : règles pratiques (1–4)

En pratique, on utilise les composantes. Pour le **changement de référentiel**, on écrit la loi (1.39), (1.71), (1.73), (1.75) ou (1.76), et, dans le cas d'un champ de tenseur, on procède comme dans l'équation (1.56). Voici des opérations sur les composantes, qui partant de tenseurs donnent d'autres tenseurs.

Règle 1. Addition, multiplication par un scalaire

Pour des tenseurs de mêmes indices ($T^\mu = \phi A^\mu + \psi B^\mu$).

Règle 2. Multiplication

C'est le produit tensoriel ($T^{\alpha\beta}{}_\gamma = F^{\alpha\beta} A_\gamma$).

Règle 3. Permutation des indices

Exemple : $T_{\rho\sigma} = R_{\sigma\rho}$. En général, on obtient un tenseur différent ($T_{\rho\sigma} = -R_{\rho\sigma}$ pour une 2-forme).

Règle 4. Contraction

On a vu que la contraction $f_\mu a^\mu$ donnait un scalaire (équation (1.68)). La double contraction $T_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$ (équation (1.74)) forme également un scalaire. Plus généralement, on appelle *contraction* une sommation de la forme $\dots^\mu \dots_\mu \dots$ des composantes d'un tenseur de type $\binom{M}{N}$. La contraction prend la même forme dans tous les référentiels et donne un tenseur de type $\binom{M-1}{N-1}$. Vérifions le pour $T_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}$. D'après l'équation (1.76)

$$R'^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} = \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\rho{}_\alpha}_{\delta_\mu{}^\rho} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\delta R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\delta R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}$$

soit $T'_{\beta\delta} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\delta T_{\nu\sigma}$ qui montre que les $T_{\beta\delta}$ se transforment comme les composantes d'un tenseur de type $\binom{0}{2}$.

1.9.8 Applications linéaires

L'expression complètement contractée

$$s = \mathbf{T}(\mathbf{f}, \vec{u}) = T^\alpha{}_\beta f_\alpha u^\beta \quad (1.77)$$

correspond à la définition du tenseur \mathbf{T} de type $\binom{1}{1}$ comme fonction complexe linéaire du covecteur $\mathbf{f} = f_\alpha \mathbf{e}^\alpha \in \mathbf{V}^*$ et du vecteur $\vec{u} = u^\beta \vec{e}_\beta \in \mathbf{V}$. Considérons maintenant l'expression

$$v^\alpha = T^\alpha{}_\beta u^\beta \quad (1.78)$$

où on laisse l'indice α libre. Elle définit une application linéaire $\vec{v} = \mathbf{T} \vec{u}$ associant au vecteur $\vec{u} = u^\beta \vec{e}_\beta \in \mathbf{V}$ le vecteur $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \in \mathbf{V}$. Ainsi, on peut considérer un **tenseur de type** $\binom{1}{1}$ comme une **application linéaire de** $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$. La matrice de cette application linéaire dans la base \vec{e}_α est $(T^\alpha{}_\beta)$. La loi de transformation des composantes du tenseur $(T^\alpha{}_\beta)$ de K à K' ,

$$T'^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta T^\mu{}_\nu, \quad (1.79)$$

n'est rien d'autre que la loi de transformation de la base \vec{e}_α à la base \vec{e}'_α de cette matrice :

$$T' = \Lambda T \Lambda^{-1}. \quad (1.80)$$

1.10 Propriétés métriques

1.10.1 Le tenseur métrique

Le produit scalaire $\mathbf{g}(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ est une fonction réelle invariante bilinéaire des deux quadrivecteurs \vec{a} et \vec{b} . C'est donc un tenseur de type $\binom{0}{2}$ et ses composantes $g_{\mu\nu}$ sont données par le tableau (1.59). Le tenseur métrique est symétrique : $\mathbf{g}(\vec{a}, \vec{b}) = \mathbf{g}(\vec{b}, \vec{a})$ ou $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Le produit scalaire s'écrit comme une contraction :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu}. \quad (1.81)$$

Les composantes du tenseur métrique sont les mêmes dans K et K' . Cette propriété s'écrit en composantes, d'après l'équation (1.73)

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\rho\sigma}. \quad (1.82)$$

Exercice 1.1 (Le groupe de Lorentz). On considère les matrices réelles 4×4 qui laissent invariant le produit scalaire (1.81). Ce sont les matrices réelles Λ qui vérifient la relation (1.82). On peut comparer cette relation à la relation $\delta_{jl} = R^i{}_j R^k{}_l \delta_{ik}$ qui caractérise les matrices orthogonales $R^i{}_j$ (groupe $O(3)$).

1) Récrire l'équation (1.82) sous forme matricielle. En déduire $\det \Lambda = \pm 1$.

2) Montrer que les matrices réelles Λ qui vérifient la relation (1.82) forment un groupe (*groupe de Lorentz* ou groupe $O(3,1)$), la loi de groupe étant le produit des matrices.

3) On désigne par $\vec{\Lambda}_\nu$ les 4 quadrivecteurs colonnes de la matrice Λ (de composantes $(\vec{\Lambda}_\nu)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$). Montrer qu'ils forment une tétrade ortho-normée.

4) Montrer que l'inverse de $\Lambda \in O(3,1)$ est donné par

$$(\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha = \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\sigma\alpha} g^{\nu\beta}. \quad (1.83)$$

5) Obtenir l'inverse (1.36) de la matrice de Lorentz (1.34) en utilisant cette équation.

6) Montrer que $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$

7) Les matrices de Lorentz se répartissent en 4 classes (nappes) suivant la valeur de $\det \Lambda$ et le signe de $\Lambda^0{}_0$ (cf. table 1.1).

TAB. 1.1 – Nappes du groupe de Lorentz. P désigne l'inversion spatiale ($P = G$ de l'équation (1.59)) et T l'inversion du sens du temps ($T = -G$).

Nappe	det Λ	Λ^0_0	contient	groupe	
L_+^\uparrow	+1	≥ 1	I	} restreint	} orthochrone
L_-^\uparrow	-1	≥ 1	P		
L_-^\downarrow	-1	≤ -1	T	} complet	
L_+^\downarrow	+1	≤ -1	TP		

a) Montrer que $L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$ (sous-ensemble des matrices de Lorentz telles que $\det \Lambda = 1$) est un groupe (groupe $SO(3,1)$).

b) Montrer les matrices de Lorentz telles que $\Lambda^0_0 \geq 1$ forment un groupe (groupe de Lorentz orthochrone $L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$).

c) Montrer que L_+^\uparrow est un groupe (groupe de Lorentz restreint).

d) L'ensemble $L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow$ forme-t-il un groupe?

1.10.2 Correspondance entre quadrvecteurs et 1-formes

Le rôle fondamental du produit scalaire est d'introduire une correspondance entre quadrvecteurs et 1-formes (en mécanique quantique, au ket $|\Phi\rangle$ correspond le bra $\langle\Phi|$). Soit $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha \in \mathbf{V}$ un quadrvecteur de composantes v^α . La fonction qui à $\vec{a} \in \mathbf{V}$ associe $\vec{v} \cdot \vec{a}$ est linéaire en \vec{a} ; elle définit la 1-forme \mathbf{v} : $\langle \mathbf{v} | \vec{a} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{a}$. Calculons les composantes de \mathbf{v} : $v_\alpha = \langle \mathbf{v} | \vec{e}_\alpha \rangle = \vec{v} \cdot \vec{e}_\alpha = v^\beta \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\alpha = v^\beta g_{\alpha\beta}$. Les composantes v_α sont donc

$$\boxed{v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta} \quad \text{ou} \quad \boxed{v_0 = v^0, \quad v_1 = -v^1, \quad v_2 = -v^2, \quad v_3 = -v^3.} \tag{1.84}$$

La transformation inverse s'écrit

$$\boxed{v^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta.} \tag{1.85}$$

Lorsque on effectue les transformations (1.84) ou (1.85) qui identifient quadrvecteurs et 1-formes on dit qu'on *abaisse* ou *monte* les indices. On peut, avec ces transformations écrire le produit scalaire (1.81) de plusieurs façons:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu = a^\mu b_\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu.} \tag{1.86}$$

1.10.3 Calcul tensoriel : règles pratiques (5)

Règle 5. Monter et abaisser les indices

Les transformations (1.84) et (1.85) permettent d'identifier des tenseurs de types $\binom{M}{N}$ avec même $M + N$. Ainsi le tenseur $F^{\alpha\beta}$ est identifié aux tenseurs $F_\alpha^\beta = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\beta}$, $F^{\alpha\beta} = g_{\beta\gamma} F^{\alpha\gamma}$ et $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} F^{\gamma\delta}$. On sait que ces expressions donnent bien des tenseurs (d'après les règles 2 et 4 de la section 1.9.7). On peut changer la hauteur des indices d'une contraction, comme dans l'équation (1.86) ou dans $T^{\mu\alpha}_\mu = T_\mu^{\alpha\mu}$.

Exercice 1.2. Quels sont les tenseurs identifiés au tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$?

1.11 Tenseur de Levi-Civita

Considérons la fonction $\varepsilon(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = -\Omega$ des 4 quadrivecteurs \vec{a}_μ qui donne l'opposé du volume algébrique Ω du parallélépipède construit sur les 4 quadrivecteurs. Le volume Ω , qui peut être calculé par $\Omega = \det((\vec{a}_\mu)^\nu)$, est une fonction multilinéaire, complètement antisymétrique et invariante dans les transformations de Lorentz (1.31). La fonction $\varepsilon(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ définit donc une 4-forme appelée *tenseur de Levi-Civita*²³. Nous utiliserons aussi le tenseur associé $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ de type $\binom{4}{0}$; ses composantes ont les mêmes valeurs dans tous les référentiels :

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation paire de } 0123; \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation impaire de } 0123; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.87)$$

Noter que la parité d'un cycle de longueur n est $(-1)^{n-1}$:

$$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon^{1230} = 1, \quad \varepsilon_{0123} = \varepsilon_{0231} = -1.$$

Lorsqu'on considère des transformations de Lorentz étendues, comme l'inversion spatiale P , l'inversion du sens du temps T ou l'inversion spatio-temporelle PT , les composantes (1.87) sont multipliées par $\det \Lambda$: le tenseur de Levi-Civita est un pseudo-tenseur.

L'opérateur \star de Hodge²⁴, transforme une p -forme en une q -forme ($p + q = d =$ la dimension de l'espace) par contraction avec le tenseur de Levi-Civita. Par exemple, la 2-forme $F_{\mu\nu}$ donne la 2-forme duale de Hodge

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (1.88)$$

On introduit un facteur de normalisation, $1/p!$ pour les p -formes, de sorte qu'on retrouve la p -forme initiale, au signe près, en appliquant une deuxième fois l'opérateur \star . On peut vérifier que $\star\star F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$. Le produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ dans l'espace euclidien²⁵ de dimension $d = 3$ apparaît comme le dual de Hodge de la 2-forme $T^{ij} = A^i B^j - A^j B^i$: $C^k = \frac{1}{2} e^{ijk} (A^i B^j - B^i A^j) = e^{ijk} A^i B^j$ où e^{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique tel que $e^{123} = 1$ (la métrique de l'espace euclidien tri-dimensionnel est δ_{ij} : monter ou abaisser les indices ne modifiant pas les valeurs des composantes des tenseurs, la convention d'Einstein est appliquée pour des indices répétés à la même hauteur).

23. Tullio Levi-Civita (1873-1941)

24. William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

25. Euclide d'Alexandrie (vers 300 av. J.-C.)

1.12 Gradient

1.12.1 Le quadrigradient

Nous considérons les quatre opérateurs $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ agissant sur les fonctions et champs de tenseurs sur l'espace-temps \mathcal{E} . Dans un changement de référentiel, ces opérateurs se transforment par $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$.

En dérivant l'équation (1.31), écrite pour la transformation inverse, on a $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$. La loi de transformation est donc $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ qui est la loi de transformation (1.71) des indices covariants.

Cela conduit à définir l'opérateur (*gradient* ou *quadrigradient*)

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (1.89)$$

Encadrons la loi de transformation dans un changement de référentiel :

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu. \quad (1.90)$$

L'opérateur ∂_μ appliqué à un tenseur de type $\binom{M}{N}$ donne un tenseur de type $\binom{M}{N+1}$. Ainsi, appliqué au quadricourant j^ν , on obtient $\partial_\mu j^\nu$, qui est un tenseur de type $\binom{1}{1}$. La *quadrividivergence* de j^μ , c'est-à-dire la contraction $\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ de ce tenseur, permet d'écrire l'équation de continuité (1.6) sous la forme covariante :

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (1.91)$$

L'action de ∂_μ sur la coordonnée x^ν de K (ici x^ν ne désigne pas un quadri-vecteur ; pour une valeur de ν donnée, x^ν ou $x^\nu(\mathcal{M})$ est le champ scalaire qui associe à $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$ la coordonnée x^ν du point \mathcal{M}) donne la 1-forme \mathbf{e}^ν (on rappelle que sa composante μ dans K est $\delta_\mu{}^\nu$) :

$$\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu{}^\nu. \quad (1.92)$$

En faisant monter l'indice de ∂_μ , on obtient la forme contravariante

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (1.93)$$

de l'opérateur gradient, qui, dans un changement de référentiel, se transforme par $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$ et qui appliquée à un tenseur de type $\binom{M}{N}$ donne un tenseur de type $\binom{M+1}{N}$.

1.12.2 Le d'Alembertien

Le d'Alembertien

$$\boxed{\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta} \quad (1.94)$$

se comporte comme un scalaire dans un changement de référentiel. Appliqué à un tenseur de type $\binom{M}{N}$, il donne un tenseur de même type $\binom{M}{N}$.

1.12.3 Une interprétation géométrique du gradient

Soit $S(\mathcal{M})$ un champ scalaire de l'espace-temps \mathcal{E} (mettons la température en $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$) et supposons qu'un observateur en \mathcal{M} effectue le déplacement $\overrightarrow{d\mathcal{M}} = \vec{u}d\tau = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$, où \vec{u} est la quadrivitesse et $d\tau$ la variation de temps propre de l'observateur. La variation de la température vue par l'observateur pendant ce déplacement est

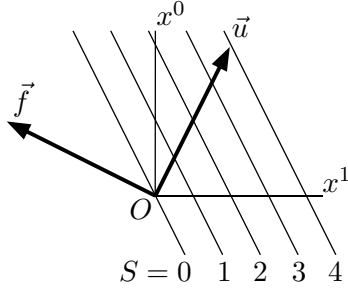
$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial S}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial S}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial S}{\partial x^3} dx^3 \\ &= (\partial_\mu S) dx^\mu = \langle \nabla S \mid \overrightarrow{d\mathcal{M}} \rangle \end{aligned} \quad (1.95)$$

où ∇S désigne la 1-forme de composantes $\partial_\mu S$ dans K . L'opérateur gradient, appliqué à S , s'interprète géométriquement sans avoir à utiliser un référentiel : il produit la 1-forme ∇S qui, appliquée au déplacement $\overrightarrow{d\mathcal{M}}$, donne la variation de S le long de $\overrightarrow{d\mathcal{M}}$.

1.12.4 Représentation géométrique d'une 1-forme

Soit une 1-forme \mathbf{f} constante. Définissons la fonction $S(\mathcal{M}) = f_\mu x^\mu$. On a $\partial_\mu S = f_\mu$ et donc $\mathbf{f} = \nabla S$. Pour tout quadrivecteur $\vec{u} \in \mathbf{V}$ choisissons deux points $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \vec{u}$. On a $\langle \mathbf{f} \mid \vec{u} \rangle = f_\mu u^\mu = S(\mathcal{B}) - S(\mathcal{A})$. La valeur de $\langle \mathbf{f} \mid \vec{u} \rangle$ est donc la variation de S le long de \vec{u} . On peut représenter géométriquement la 1-forme \mathbf{f} par la famille d'hyperplans $S = \text{Cte}$, pour des valeurs entières de Cte (l'unité de mesure mise à part). La valeur $\langle \mathbf{f} \mid \vec{u} \rangle$ est alors le nombre d'hyperplans de cette famille traversés par le vecteur \vec{u} , ce nombre étant compté positivement ou négativement suivant le sens de variation de S .

FIG. 1.8 – Représentation géométrique d'une 1-forme.



Sur la figure 1.8, on a représenté les hyperplans $S = x^0 + 2x^1 = \text{Cte}$ associés à la 1-forme \mathbf{f} de composantes

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 2, \quad f_2 = f_3 = 0$$

(coordonnées x^2 et x^3 omises). Pour le vecteur $\vec{u} = (2, 1, 0, 0)$, qui traverse les 4 hyperplans $S = 1, 2, 3$ et 4 , $\langle \mathbf{f} | \vec{u} \rangle = 4$. Le quadrivecteur \vec{f} de composantes $f^\mu = \partial^\mu S = (1, -2, 0, 0)$ est normal aux hyperplans $S = \text{Cte}$. On a aussi $\vec{f} \cdot \vec{u} = \langle \mathbf{f} | \vec{u} \rangle = 4$.

1.13 Intégrales quadridimensionnelles

1.13.1 L'invariance de l'élément de volume d^4x

Dans les intégrales sur l'espace-temps \mathcal{E} , l'élément de volume quadridimensionnel d^4x se transforme de K à K' par

$$d^4x' = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = |\det \Lambda| d^4x = d^4x. \quad (1.96)$$

L'élément de volume quadridimensionnel est donc un invariant :

$$\boxed{d^4\mathcal{M} = d^4x' = d^4x.} \quad (1.97)$$

Un champ scalaire $S(\mathcal{M})$ sur l'espace-temps \mathcal{E} s'écrit dans K et K' sous les formes

$$S(\mathcal{M}) = S(x^0, x^1, x^2, x^3) = S'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \quad (1.98)$$

Exemple: Le temps t dans le référentiel K de l'événement \mathcal{M} peut être considéré comme le champ scalaire

$$S(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{x^0}{c} = S'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \frac{\gamma(x'^0 + \beta x'^1)}{c} \quad (1.99)$$

pour K et K' liés par la transformation de Lorentz spéciale (1.34).

L'intégrale dans tout l'espace-temps \mathcal{E} du champ scalaire (1.98) peut se calculer dans K ou K' :

$$\int_{\mathcal{E}} S(\mathcal{M}) d^4\mathcal{M} = \int S'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) d^4x' = \int S(x^0, x^1, x^2, x^3) d^4x. \quad (1.100)$$

1.13.2 Fonction de Dirac quadridimensionnelle

La fonction de Dirac²⁶ quadridimensionnelle

$$\boxed{\delta^{(4)}(u^\mu) = \delta(u^0)\delta(u^1)\delta(u^2)\delta(u^3)} \quad (1.101)$$

est le produit de quatre fonctions de Dirac. Soit \mathcal{Y} un point de l'espace-temps \mathcal{E} , de coordonnées y^μ dans K , et désignons par $\mathcal{M} \in \mathcal{E}$, de coordonnées x^μ dans K , le point sur lequel on intègre. Posons $u^\mu = x^\mu - y^\mu$ dans (1.101) et calculons l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{E}} \delta^{(4)}(x^\mu - y^\mu) S(x^0, x^1, x^2, x^3) d^4x \\ &= \int \delta(x^0 - y^0) \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \delta(x^3 - y^3) S(x^0, x^1, x^2, x^3) d^4x \\ &= S(y^0, y^1, y^2, y^3) = S(\mathcal{Y}) \end{aligned} \quad (1.102)$$

On trouve de même, dans K' , en posant $u^\mu = x'^\mu - y'^\mu$ dans (1.101) et en utilisant (1.98),

$$\int_{\mathcal{E}} \delta^{(4)}(x'^\mu - y'^\mu) S'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) d^4x' = S'(y'^0, y'^1, y'^2, y'^3) = S(\mathcal{Y}).$$

La fonction de Dirac quadridimensionnelle est donc un invariant (champ scalaire) qu'on peut noter $\delta^{(4)}(\vec{u})$:

$$\boxed{\delta^{(4)}(\vec{u}) = \delta^{(4)}(u'^\mu) = \delta^{(4)}(u^\mu)}, \quad (1.103)$$

où on n'a pas écrit $\delta^{(4)}(u'^\mu)$ puisque la fonction, donnée par (1.101), est la même dans K et K' .

1.13.3 Intégration par parties

Soient $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ et $g(x^0, x^1, x^2, x^3)$ deux fonctions sur l'espace-temps \mathcal{E} qui s'annulent dans toutes les directions à l'infini de \mathcal{E} . On a les propriétés suivantes, utiles par la suite.

– L'intégrale dans tout l'espace-temps de $\partial_\mu f$ est

$$\boxed{\int \partial_\mu f d^4x = 0.} \quad (1.104)$$

En effet, on a, par exemple pour $\mu = 1$,

$$\begin{aligned} \int \partial_1 f d^4x &= \int dx^0 dx^2 dx^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ &= \int dx^0 dx^2 dx^3 [f|_{x^1=\infty} - f|_{x^1=-\infty}] = 0. \end{aligned} \quad (1.105)$$

²⁶ Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

– Intégration par parties

$$\boxed{\int f (\partial_\mu g) d^4x = - \int (\partial_\mu f) g d^4x.} \quad (1.106)$$

En effet, d'après l'équation (1.104),

$$\int f \partial_\mu g d^4x = \int [\partial_\mu (fg) - (\partial_\mu f)g] d^4x = - \int (\partial_\mu f)g d^4x. \quad (1.107)$$

1.14 Quadripotentiel

Regroupons, dans K , les potentiels \vec{A} et ϕ de jauge de Lorenz, en posant $A^0 = \phi/c$, à l'aide du seul symbole²⁷

$$\boxed{\vec{A} = (A^\alpha) = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)} \quad (\text{quadripotentiel}). \quad (1.108)$$

Les équations (1.21) et (1.22) se regroupent²⁸ en utilisant le quadricourant (1.54) :

$$\boxed{\square A^\alpha = \mu_0 j^\alpha.} \quad (1.109)$$

La condition de Lorenz (1.12) s'écrit

$$\boxed{\partial_\alpha A^\alpha = 0} \quad (\text{quadridivergence de } \vec{A} = 0). \quad (1.110)$$

Ces équations, compte tenu de l'invariance du d'Alembertien, sont covariantes si on postule que le quadripotentiel est un quadrivecteur, ce que nous avons anticipé dans la notation $\vec{A} = (A^\alpha)$. Remarquer que le potentiel scalaire ϕ n'est pas un scalaire dans les transformations de Lorenz (il est un scalaire dans les rotations-translations spatiales). La condition de Lorenz reste vérifiée dans tous les référentiels. En appliquant l'opérateur ∂_α à gauche de l'équation (1.109) on obtient, avec (1.110), l'équation de continuité (1.91) $\partial_\alpha j^\alpha = 0$.

L'invariance de jauge (1.11) s'écrit

$$A^\alpha \longrightarrow A^\alpha - \partial^\alpha \psi. \quad (1.111)$$

On peut considérer ψ comme un scalaire ; le quadripotentiel \vec{A} est alors considéré comme un quadrivecteur quelle que soit la jauge considérée. Cependant, si le quadripotentiel \vec{A} satisfait à la condition de Coulomb (1.13) dans le référentiel K , $\partial_i A^i = 0$ (somme sur $i = 1, 2, 3$), alors dans le référentiel K' , $\partial'_i A'^i = (\Lambda^{-1})^\mu{}_i \Lambda^i{}_\nu \partial_\mu A^\nu$ peut être différent de zéro : la condition de Coulomb n'est pas nécessairement vérifiée dans K' .

27. $\vec{A} = (A^\alpha) = (\phi, \vec{A})$ en système de Gauss (cgs)

28. $\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$ en système de Gauss (cgs)

1.15 Tenseur du champ électromagnétique

Récrivons les équations (1.10) donnant les champs $\vec{E} = (E^x, E^y, E^z)$ et $\vec{B} = (B^x, B^y, B^z)$ (les indices qui correspondent aux axes de coordonnées 1, 2, 3 sont nommés x, y, z pour rappeler qu'ils ne sont pas contravariants : nous ne définirons pas un quadrivecteur E^μ) en fonction des composantes covariantes du quadripotiel $A_0 = \phi/c$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$ et en exprimant les dérivées à l'aide des opérateurs ∂_μ . On obtient

$$\begin{aligned} E^x &= c(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0), & B^x &= \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3, \\ E^y &= c(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0), & B^y &= \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1, \\ E^z &= c(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0), & B^z &= \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Les champs apparaissent dans le *tenseur du champ électromagnétique* (ou *tenseur de Faraday*)

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}, \quad (1.113)$$

de composantes

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y/c & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z/c & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}}. \quad (1.114)$$

En montant les indices, on obtient

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x/c & -E^y/c & -E^z/c \\ E^x/c & 0 & -B^z & B^y \\ E^y/c & B^z & 0 & -B^x \\ E^z/c & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}}. \quad (1.115)$$

Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) : c'est une 2-forme. On peut vérifier l'invariance de jauge en remplaçant A_α par $A_\alpha - \partial_\alpha \psi$ dans $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. On retrouve alors $F_{\mu\nu} : \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu \psi) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu \psi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

L'opérateur \star de Hodge (1.88) donne un nouveau tenseur antisymétrique

$$\boxed{\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B^x & B^y & B^z \\ -B^x & 0 & E^z/c & -E^y/c \\ -B^y & -E^z/c & 0 & E^x/c \\ -B^z & E^y/c & -E^x/c & 0 \end{pmatrix}} \quad (1.116)$$

appelé le *dual* de $F_{\mu\nu}$. Remarquons que $\star F_{\mu\nu}$ s'obtient en faisant les remplacements

$$\vec{E} \longrightarrow c\vec{B}, \quad \vec{B} \longrightarrow -\frac{\vec{E}}{c} \quad (\text{dualité électrique-magnétique}) \quad (1.117)$$

dans $F_{\mu\nu}$. Ce remplacement laisse les équations de Maxwell (1.1–1.4) invariantes lorsque \vec{J} et ρ sont nuls. Noter que

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \quad \text{et} \quad F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} = -\frac{4\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} \quad (1.118)$$

sont des invariants.

Transformation des champs

La loi de transformation des composantes (1.73),

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu F_{\rho\sigma}, \quad (1.119)$$

permet d'obtenir les champs \vec{E}' et \vec{B}' dans le référentiel K' en fonction des champs dans le référentiel K . Dans le cas de la transformation de Lorentz spéciale vue à la section 1.3, où la matrice Λ^{-1} est donnée par l'équation (1.36), on obtient (détails des calculs plus bas) :

$$\begin{aligned} E'^x &= E^x & B'^x &= B^x \\ E'^y &= \gamma(E^y - \beta c B^z) & B'^y &= \gamma \left(B^y + \frac{\beta}{c} E^z \right) \\ E'^z &= \gamma(E^z + \beta c B^y) & B'^z &= \gamma \left(B^z - \frac{\beta}{c} E^y \right). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Ces formules de transformations correspondent à des champs au même point de l'espace-temps. L'équation $E'^x = E^x$ signifie, en détaillant,

$$\begin{aligned} E'^x(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) &= E^x(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= E^x(\gamma(x'^0 + \beta x'^1), \gamma(x'^1 + \beta x'^0), x'^2, x'^3) \end{aligned} \quad (1.121)$$

où les x^μ ont été exprimés en fonction des x'^μ par l'équation (1.35).

Obtention des équations (1.120)

On calcule $F'_{01} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_0 (\Lambda^{-1})^\sigma{}_1 F_{\rho\sigma} = (\Lambda^{-1})^0{}_0 (\Lambda^{-1})^1{}_1 F_{01} + (\Lambda^{-1})^1{}_0 (\Lambda^{-1})^0{}_1 F_{10} = \gamma^2 F_{01} + \beta^2 \gamma^2 F_{10} = (1 - \beta^2) \gamma^2 F_{01} = F_{01}$ d'où

$$E'^x = E^x \quad \text{et} \quad B'^x = B^x$$

en utilisant $\star F'_{01} = \star F_{01}$ pour le tenseur dual.

Puis $F'_{02} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_0 (\Lambda^{-1})^\sigma{}_2 F_{\rho\sigma} = (\Lambda^{-1})^0{}_0 (\Lambda^{-1})^2{}_2 F_{02} + (\Lambda^{-1})^1{}_0 (\Lambda^{-1})^2{}_1 F_{12} = \gamma F_{02} + \beta \gamma F_{12}$ donne

$$E'^y = \gamma(E^y - \beta c B^z) \quad \text{et} \quad B'^y = \gamma \left(B^y + \frac{\beta}{c} E^z \right).$$

De même $F'_{03} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_0 (\Lambda^{-1})^\sigma{}_3 F_{\rho\sigma} = (\Lambda^{-1})^0{}_0 (\Lambda^{-1})^3{}_3 F_{03} + (\Lambda^{-1})^1{}_0 (\Lambda^{-1})^3{}_3 F_{13} = \gamma F_{03} + \beta\gamma F_{13}$ donne

$$E'^z = \gamma(E^z + \beta c B^y) \quad \text{et} \quad B'^z = \gamma \left(B^z - \frac{\beta}{c} E^y \right).$$

Remarquons que les calculs ci-dessus (transformation des composantes d'un tenseur $F_{\mu\nu}$ de type $\binom{0}{2}$) peuvent aussi être effectués sous forme matricielle en notant $F_{\bullet\bullet}$ la matrice des composantes et en récrivant la loi de transformation des composantes (1.119) sous la forme

$$F'_{\bullet\bullet} = \widetilde{\Lambda^{-1}} F_{\bullet\bullet} \Lambda^{-1}. \quad (1.122)$$

1.16 Formulation covariante de l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell s'écrivent avec le tenseur du champ électromagnétique et son dual sous la forme

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (1.123)$$

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.124)$$

En effet pour $\nu = 0$, $\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0$, soit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}/c = \mu_0 c \rho$, équivaut à l'équation de Maxwell (1.1) et $\partial_\mu \star F^{\mu 0} = 0$ à l'équation de Maxwell (1.3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Pour $\nu = 1$, $\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1$, soit

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E^x}{\partial t} + \partial_y B^z - \partial_z B^y = \mu_0 J^x,$$

est la composante x de l'équation de Maxwell (1.2). Par des calculs similaires, on peut vérifier que l'équation de Maxwell (1.2) (resp. (1.4)) équivaut à $\partial_\mu F^{\mu i} = \mu_0 j^i$ (resp. $\partial_\mu \star F^{\mu i} = 0$).

L'équation (1.124) s'écrit aussi en fonction de $F_{\mu\nu}$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (1.125)$$

On peut ainsi remplacer (1.124) par

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (1.126)$$

qui est valable pour μ , ν et ρ quelconques : lorsque μ , ν et ρ sont tous différents, cela résulte de (1.125) ; lorsque par exemple $\mu = \nu$, cela résulte de l'antisymétrie de $F_{\rho\sigma}$.

Il est instructif de vérifier la cohérence de l'équation (1.123), c'est-à-dire que le quadricourant a une quadridivergence nulle :

$$\mu_0 \partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.127)$$

La deuxième expression est bien nulle :

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0; \quad (1.128)$$

la première égalité résulte de la symétrie de $\partial_\nu \partial_\mu$ et de l'antisymétrie de $F^{\mu\nu}$ dans l'échange de μ et ν ; la deuxième s'obtient en renommant les indices muets.

Déterminons maintenant l'écriture covariante de la force de Lorentz (1.7). En relativité, l'équation non-relativiste (1.26) du mouvement d'une particule devient

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{f} \quad \text{ou, en composantes,} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad (1.129)$$

qui exprime la dérivée par rapport au temps propre de la quadriimpulsion $\vec{p} = m\vec{u} = \left(\frac{W}{c}, \vec{P}\right)$ de la particule en fonction d'un quadrivecteur \vec{f} (la *quadriforce*). Cette expression doit redonner la loi du mouvement

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \quad (1.130)$$

et la dérivée temporelle de l'énergie de la particule

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} = q \vec{E} \cdot \vec{V}. \quad (1.131)$$

Dans un **référentiel comobile** (cf. section 1.6) avec la particule,

$$\vec{V} = 0, \quad \vec{P} = 0, \quad \vec{u} = (c, 0, 0, 0), \quad \vec{p} = (mc, 0, 0, 0), \quad (1.132)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = q\vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{dW}{dt} = 0. \quad (1.133)$$

On en déduit que dans ce référentiel

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \left(\frac{1}{c} \frac{dW}{d\tau}, \frac{d\vec{P}}{d\tau} \right) = \left(0, q\vec{E} \right). \quad (1.134)$$

Le quadrivecteur qui a pour composantes $\left(0, q\vec{E} \right)$ dans le référentiel comobile peut s'écrire de façon covariante : $\left(0, q\vec{E} \right) = qF^{\mu\nu} u_\nu$. La forme covariante de l'équation du mouvement ne peut donc être que

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu} u_\nu.} \quad (1.135)$$

On vérifie en effet, dans un référentiel quelconque, en utilisant $\vec{u} = (\gamma c, \gamma \vec{V})$ (cf. équation (1.47)) et $d\tau = dt/\gamma$, que $\frac{dp^i}{d\tau} = qF^{i\nu}u_\nu$ équivaut à l'équation (1.130). L'équation (1.135) pour $\mu = 0$, $\frac{dp^0}{d\tau} = qF^{0\nu}u_\nu$, donne la dérivée temporelle de l'énergie de la particule (1.131).

Considérons le tenseur du champ électromagnétique comme une application linéaire F de $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ de matrice $F^\mu{}_\nu$ (cf. section 1.9.8). On réécrit l'équation (1.135) sous la forme

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{f} = qF\vec{u}} \quad (1.136)$$

qui donne une interprétation physique du tenseur du champ électromagnétique : c'est l'application linéaire qui appliquée à $q\vec{u}$ donne la quadriforce \vec{f} agissant sur une particule de charge q et quadrivitesse \vec{u} . On peut obtenir la valeur expérimentale de cette application linéaire F en mesurant la quadriforce \vec{f} ressentie par une particule sonde de charge q animée de diverses quadrivesses \vec{u} . Il est clair que F est indépendant du référentiel d'inertie tout comme q , \vec{u} et \vec{f} .

L'équation (1.136) donne également une interprétation de l'antisymétrie du tenseur $F^{\mu\nu}$. En dérivant l'équation $\vec{p} \cdot \vec{p} = m^2c^2$ on obtient que la quadriforce est orthogonale à la quadrivitesse :

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{p} \cdot \vec{f} = m\vec{u} \cdot \vec{f} = 0. \quad (1.137)$$

On doit avoir $F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 0$ pour toute quadrivitesse \vec{u} , ce qui n'est possible que si $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique.

1.16.1 Formulation en termes du quadripotentiel

Nous avons vu, section 1.1.3, que les équations de Maxwell (1.3) et (1.4), qui s'écrivent de façon covariante sous la forme (1.124) ou (1.126), sont équivalentes à l'existence des potentiels. On en déduit, en utilisant (1.113), qu'une 2-forme $F_{\mu\nu}$ vérifie l'équation $\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = 0$ si et seulement si il existe un quadripotentiel A^μ tel que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \quad \iff \quad \exists A_\mu \quad : \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.138)$$

Retrouvons quelques résultats de la section 1.1.3 en utilisant le formalisme covariant. Le quadripotentiel A^μ n'est pas défini de façon unique par l'équation (1.113). Si A^μ et \tilde{A}^μ sont deux quadripotentiels vérifiant (1.113), alors $W^\mu = A^\mu - \tilde{A}^\mu$ vérifie $\partial_\mu W_\nu = \partial_\nu W_\mu$. Il en résulte que $W_\mu dx^\mu$ est une différentielle totale : il existe une fonction $\psi(x^\mu)$ telle que $d\psi = W_\mu dx^\mu$ et $W_\mu = \partial_\mu \psi$. On retrouve ainsi l'invariance de jauge (1.11)

$$A^\alpha \longrightarrow \tilde{A}^\alpha = A^\alpha - \partial^\alpha \psi. \quad (1.139)$$

En portant $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ dans $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ on obtient $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\nu$, soit

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\nu} \quad (1.140)$$

qui est l'expression covariante des équations (1.19) et (1.20) en jauge arbitraire. En jauge de Lorenz elle redonne (1.109) $\boxed{\partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\nu}$.

1.17 Résumé

Le tenseur du champ électromagnétique est la 2-forme

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x/c & E^y/c & E^z/c \\ -E^x/c & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y/c & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z/c & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.141)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu}, \quad \boxed{\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0}. \quad (1.142)$$

La quadriforce f^μ agissant sur une particule de charge q et de quadrivitesse u_μ est

$$\boxed{f^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu}. \quad (1.143)$$

Le tenseur du champ électromagnétique dérive d'un quadripotentiel

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}. \quad (1.144)$$

Le champ électromagnétique reste invariant dans les transformations de jauge

$$A^\alpha \longrightarrow \tilde{A}^\alpha = A^\alpha - \partial^\alpha \psi. \quad (1.145)$$

On peut imposer la condition de jauge de Lorenz

$$\boxed{\partial_\alpha A^\alpha = 0}. \quad (1.146)$$

Le quadripotentiel vérifie alors

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu}. \quad (1.147)$$

2

Lagrangien

On montre que le système champ électromagnétique + particules est décrit par un lagrangien¹ de la forme $L = L_{\text{part}} + L_{\text{champ}} + L_{\text{int}}$. On détermine d'abord le lagrangien L_{part} d'une particule libre, puis la forme du terme d'interaction L_{int} entre une particule et le champ et, pour terminer, le lagrangien du champ libre L_{champ} .

2.1 Particule chargée dans un champ extérieur

2.1.1 Le principe de moindre action

Notons les coordonnées de la particule dans le référentiel K par $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ et la vitesse de la particule par $\frac{d\vec{x}}{dt} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ ou $\vec{V} = (V^1, V^2, V^3)$. Le système est caractérisé par un lagrangien $L(x^i, \dot{x}^i, t)$ qui est une fonction explicite des x^i , \dot{x}^i , et éventuellement du temps t . L'action

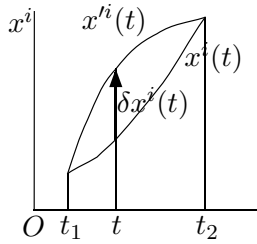


FIG. 2.1 – Variation de la trajectoire.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}^i, t) dt \quad (2.1)$$

est une fonctionnelle $S[\vec{x}(t)]$ définie pour toute fonction $\vec{x}(t)$ (pas seulement pour le mouvement réel de la particule) pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$. On considère une variation infinitésimale $\delta\vec{x}(t)$ de $\vec{x}(t)$ vérifiant

$$\delta\vec{x}(t_1) = \delta\vec{x}(t_2) = 0. \quad (2.2)$$

Les points initial $\vec{a} = \vec{x}(t_1)$ et final $\vec{b} = \vec{x}(t_2)$ sont inchangés dans la nouvelle trajectoire (cf. figure 2.1)

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t). \quad (2.3)$$

1. Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Le principe de moindre action dit que S est stationnaire² pour toute variation infinitésimale $\delta\vec{x}(t)$ vérifiant (2.2) si et seulement si $\vec{x}(t)$ est une trajectoire réelle. En dérivant (2.3) on obtient la variation de la vitesse

$$\delta\dot{x}^i = \dot{x}'^i - \dot{x}^i = \frac{d}{dt}\delta x^i \quad \text{ou} \quad \delta d = d\delta \quad (2.4)$$

(l'opérateur de variation δ commute avec l'opérateur de différentiation). La variation de l'action s'écrit (somme implicite sur i ; l'opérateur δ commute avec l'intégration sur t)

$$\delta S = S[\vec{x}'(t)] - S[\vec{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt. \quad (2.5)$$

On obtient (utiliser (2.4) et intégrer par parties compte tenu de (2.2))

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \delta x^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta x^i} \delta x^i dt \quad (2.6)$$

en introduisant la *dérivée fonctionnelle* (ou *dérivée d'Euler³-Lagrange*)

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \quad (2.7)$$

Pour que $\delta S = 0$ quelles que soient les variations δx^i , il faut que $\frac{\delta S}{\delta x^i} = 0$, soit

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0.} \quad (\text{équations d'Euler-Lagrange}). \quad (2.8)$$

Ces équations d'Euler-Lagrange sont les équations du mouvement. Nous définirons le *moment canonique conjugué* $\vec{\Pi} = (\Pi^1, \Pi^2, \Pi^3)$ de x^i par

$$\Pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{noté} \quad \vec{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}}. \quad (2.9)$$

Nota : En écriture covariante on a $\Pi_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ avec $\Pi^i = -\Pi_i$.

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent en fonction du moment canonique conjugué

$$\frac{d\Pi^i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i}. \quad (2.10)$$

Dans le cas du mouvement **non relativiste** d'une charge q dans un champ électrique \vec{E} de potentiel $\phi(\vec{x})$, le lagrangien a la forme

$$L_{NR} = \frac{1}{2}m\vec{V}^2 - q\phi(\vec{x}) + \text{Cte}, \quad (2.11)$$

2. S n'est pas toujours un minimum.

3. Leonhard Euler (1707-1783)

les équations d'Euler-Lagrange donnent les équations de Newton

$$m\ddot{x}^i = -q \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = qE^i \quad (2.12)$$

et le moment canonique conjugué de \vec{x} est la quantité de mouvement $\vec{\Pi} = \vec{P} = m\vec{V}$ de la particule.

2.1.2 Particule matérielle relativiste libre (en champ nul)

Afin que les équations qui résultent de $\delta S = 0$ aient la même forme dans tout référentiel d'inertie, S doit être un invariant scalaire. L'action le long d'une trajectoire, correspondant à une ligne d'univers $\mathcal{M}(t)$ de la particule paramétrée par le temps dans K , est la somme des actions infinitésimales Ldt qui doivent être chacune un invariant scalaire. L'invariant scalaire infinitésimal Ldt est associé au déplacement infinitésimal $d\vec{\mathcal{M}}$ le long de la ligne d'univers. Mais les seuls scalaires infiniment petits d'ordre un qu'on puisse former avec le déplacement $d\vec{\mathcal{M}}$ d'une particule libre sont αds (α est une constante, $ds^2 = d\vec{\mathcal{M}} \cdot d\vec{\mathcal{M}}$ l'intervalle). Nous avons donc (cf. équation (1.46))

$$Ldt = \alpha ds = \alpha c \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt. \quad (2.13)$$

Dans la limite non relativiste $V \ll c$, $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 1 - \frac{V^2}{2c^2} + \dots$. On choisit $\alpha = -mc$ pour retrouver le lagrangien non relativiste d'une particule libre $L_{0NR} = \frac{1}{2}mV^2 + \text{Cte}$. L'action d'une particule matérielle libre est donc

$$S = -mc \int_{t_1}^{t_2} ds = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt \quad (2.14)$$

et le lagrangien

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (2.15)$$

Le moment canonique conjugué de \vec{x} est la quantité de mouvement de la particule

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.16)$$

et les équations d'Euler-Lagrange donnent $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$. La particule a un mouvement rectiligne uniforme. Dans un référentiel où la particule est immobile, l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} c dt, \quad (2.17)$$

pour les trajectoires virtuelles telles que $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$, est maximum lorsque la vitesse \vec{V} est nulle à tout moment, c'est à dire pour la trajectoire réelle (particule fixe). L'action, qui est $-mc$ fois cette intégrale, est donc minimum pour la trajectoire réelle.

2.1.3 Particule relativiste dans un champ électromagnétique extérieur

Déterminons l'action infinitésimale Ldt pendant le déplacement infinitésimal $\overrightarrow{d\mathcal{M}} = \vec{u}d\tau$ (\vec{u} quadrivitesse, $d\tau$ temps propre). Comme c'est un invariant, utilisons pour cela un référentiel comobile avec la particule (cf. section 1.6). La particule est alors non relativiste et la force magnétique est négligeable (particule presque au repos). L'action infinitésimale Ldt doit alors prendre la forme non relativiste $L_{NR}dt$ où L_{NR} est le lagrangien (2.11). Le terme d'interaction est $-q\phi dt = -q\vec{A} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{M}} = -qA_\mu dx^\mu$, réécrit de façon covariante en utilisant le quadripotential $\vec{A} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ et le déplacement $\overrightarrow{d\mathcal{M}} = (dx^\mu) = (cdt, 0, 0, 0)$ dans le référentiel comobile.

Nous obtenons l'action pour une charge dans un champ électromagnétique extérieur en ajoutant cette interaction à l'action (2.14) d'une particule libre :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (-mcds - qA_\mu dx^\mu) \quad (2.18)$$

Dans un référentiel quelconque, $-qA_\mu dx^\mu = -q\phi dt + q\vec{A} \cdot d\vec{x} = (-q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{V})dt$, et le lagrangien s'écrit comme la somme du lagrangien L_0 de la particule libre et du lagrangien d'interaction L_{int}

$$\boxed{L = L_0 + L_{\text{int}}}, \quad \boxed{L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \boxed{L_{\text{int}} = -q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{V}}. \quad (2.19)$$

Le moment canonique conjugué de \vec{x} ,

$$\vec{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + q\vec{A} = \vec{P} + q\vec{A}, \quad (2.20)$$

est différent de la quantité de mouvement de la particule \vec{P} . L'équation d'Euler-Lagrange est, sous forme vectorielle,

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} + q\vec{A}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{V}). \quad (2.21)$$

Noter que la vitesse \vec{V} est une constante vis-à-vis de l'opérateur $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$.

La dérivée $\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}(t), t)$ se calcule par $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{V}). \quad (2.22)$$

Avec la relation $\vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{V}) - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$, on a :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q \left[\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \right] \quad (2.23)$$

Cette expression redonne bien la loi du mouvement (1.130) en utilisant les expressions (1.10) des champs en fonction des potentiels :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right). \quad (2.24)$$

Une démonstration covariante de ce résultat est donnée page 54, exemple 4.

Dans la transformation de jauge (1.11), le lagrangien devient

$$L \longrightarrow L' = L + q\frac{\partial \psi}{\partial t} + q\vec{V} \cdot \nabla \psi = L + q\frac{d\psi}{dt}. \quad (2.25)$$

Comme L et L' diffèrent d'une dérivée totale par rapport au temps, $\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\delta S'}{\delta x^i}$ et les équations d'Euler-Lagrange restent inchangées.

2.1.4 Hamiltonien

L'hamiltonien⁴ $H = \sum_{i=1}^3 \Pi^i \dot{x}^i - L =$

$$\left(\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + q\vec{A} \right) \cdot \vec{V} - \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{V} \right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + q\phi \quad (2.26)$$

doit être écrit en fonction de $\vec{\Pi}$ et \vec{x} au lieu de \vec{V} et \vec{x} . Pour cela on peut remarquer que la quadriimpulsion de la particule est, posant $\vec{\pi} = \left(\frac{H}{c}, \vec{\Pi} \right)$,

$$\vec{p} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \vec{P} \right) = \left(\frac{H - q\phi}{c}, \vec{\Pi} - q\vec{A} \right) = \vec{\pi} - q\vec{A}. \quad (2.27)$$

4. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

La relation $c^2 \vec{p} \cdot \vec{p} = (H - q\phi)^2 - c^2(\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 = m^2 c^4$ donne l'hamiltonien

$$H = \sqrt{c^2(\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 + m^2 c^4} + q\phi. \quad (2.28)$$

Les équations du mouvement se retrouvent par les équations de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial \Pi^i} = \dot{x}^i, \quad \frac{\partial H}{\partial x^i} = -\dot{\Pi}^i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.29)$$

2.2 Corde classique à une dimension

2.2.1 Lagrangien

Nous considérons un système de masses ponctuelles reliées par des ressorts (cf. figure 2.2), puis nous faisons tendre le nombre de masses vers l'infini, la distance entre masses vers zéro de sorte qu'on tende vers un système continu de densité et élasticité uniformes. Nous aurons ainsi un exemple de lagrangien décrivant un champ.

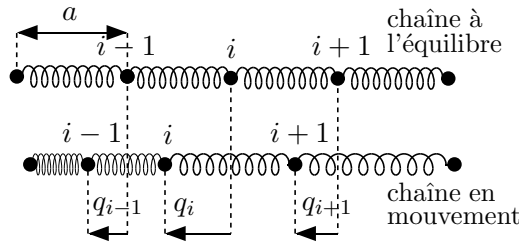


FIG. 2.2 – Chaîne d'oscillateurs couplés.

Le déplacement de la $i^{\text{ème}}$ masse est $q_i(t)$. La constante de rappel de chaque ressort est K . Les énergies cinétique et potentielle sont

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_i K (q_{i+1} - q_i)^2. \quad (2.30)$$

On considère la limite continue dans laquelle la distance a entre les masses à l'équilibre tend vers 0 :

$$a \rightarrow 0, \quad \frac{m}{a} \rightarrow \mu \text{ (masse par unité de longueur),} \\ Ka \rightarrow Y \text{ (module de Young).} \quad (2.31)$$

Les variables $q_i(t)$ deviennent un champ continu $q(x, t)$ (x abscisse de la masse i au repos). On remplace

$$\dot{q}_i \text{ par } \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}, \quad \sum_i a \text{ par } \int dx \quad \text{et} \quad \frac{q_{i+1} - q_i}{a} \text{ par } \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}. \quad (2.32)$$

Les énergies cinétique et potentielle deviennent

$$T = \frac{1}{2}\mu \int dx \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2, \quad U = \frac{1}{2}Y \int dx \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2. \quad (2.33)$$

Le lagrangien est

$$L = T - U = \int dx \mathcal{L} \quad \text{où} \quad \mathcal{L} \left(\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \quad (2.34)$$

est la densité lagrangienne. Pour une corde infinie, l'intégrale est sur toute la droite réelle et on suppose que le champ $q(x, t)$ et sa dérivée $\frac{\partial q}{\partial x}$ s'annulent à l'infini. Pour une corde finie de longueur ℓ , l'intégrale est sur $[0, \ell]$ et on peut supposer des conditions aux limites périodiques (la corde forme une boucle)

$$q(0, t) = q(\ell, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial q}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial q}{\partial x}(\ell, t). \quad (2.35)$$

L'action est dans ce dernier cas $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \mathcal{L}$. On effectue une variation $\delta q(x, t)$ du champ telle que

$$\delta q(x, t_1) = \delta q(x, t_2) = 0 \quad \text{et} \quad \delta q(0, t) = \delta q(\ell, t). \quad (2.36)$$

La variation de l'action δS est (bornes d'intégrations omises)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)} \delta \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)} \delta \frac{\partial q}{\partial x} \right] dx dt \\ &= \int \left[\mu \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial \delta q}{\partial t} - Y \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \delta q}{\partial x} \right] dx dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

On a utilisé la commutation de l'opérateur de variation δ et des dérivées partielles (comparer à (2.4)). On intègre par parties chaque terme ; les termes tout intégrés disparaissent avec les conditions aux limites (2.35) et (2.36)

$$\delta S = \int \left[-\mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right] \delta q dx dt. \quad (2.38)$$

Le principe de moindre action $\delta S = 0$ quel que soit δq conduit à l'équation des ondes dans la corde

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad \text{où} \quad v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (2.39)$$

2.2.2 Hamiltonien

Pour la chaîne discrète, le moment conjugué de q_i est $p_i = m\dot{q}_i$ et l'hamiltonien est

$$H = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U. \quad (2.40)$$

Dans la limite continue, $\frac{p_i}{a} = \mu\dot{q}_i$ tend vers

$$\pi(x, t) = \mu \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) \quad (\text{impulsion par unité de longueur}) \quad (2.41)$$

et l'hamiltonien vers

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad \text{où} \quad \mathcal{H} \left(\pi, \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{1}{2\mu} \pi^2 + \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \quad (2.42)$$

est la densité hamiltonienne. Le passage direct de la densité lagrangienne $\mathcal{L} \left(\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x} \right)$ à la densité hamiltonienne se fait en introduisant

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (\text{moment conjugué de } \dot{q}), \quad (2.43)$$

ce qui redonne (2.41), et en formant

$$\mathcal{H} = \dot{q}\pi - \mathcal{L} \quad (2.44)$$

qui, exprimé en fonction de π et $\frac{\partial q}{\partial x}$, redonne (2.42).

2.3 Équations d'Euler-Lagrange pour un champ continu

Nous considérons un champ sur l'espace-temps \mathcal{E} décrit, dans un référentiel K , par N composantes réelles

$$\phi_k(\vec{x}, t) = \phi_k(x^\mu) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.45)$$

L'exemple précédent correspondait à $N = 1$ et le champ était défini sur un espace-temps à 2D ($\phi_1(x, t) = q(x, t)$). On a maintenant une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k, x^\mu)$ qui est une fonction explicite de ϕ_k , des dérivées $\partial_\mu \phi_k = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^\mu}$ et des coordonnées x^μ du point \mathcal{M} . Cela généralise l'exemple précédent où la densité $\mathcal{L} \left(\frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x} \right)$ ne dépendait pas du champ $q(x, t)$. Le lagrangien est (intégrale dans tout l'espace tridimensionnel)

$$L = \int \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k, x^\mu) d^3x \quad (2.46)$$

et l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k, x^\mu) d^4x. \quad (2.47)$$

Nous intégrerons dans tout l'espace-temps \mathcal{E} (cela correspond à prendre $t_1 \rightarrow -\infty, t_2 \rightarrow \infty$). Nous imposons que la densité lagrangienne \mathcal{L} soit un scalaire de Lorentz de sorte que l'action S soit bien un invariant scalaire (cf. section 1.13). La variation de l'action δS pour une variation $\delta\phi_k$ du champ s'écrit

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \delta\partial_\mu \phi_k \right] d^4x. \quad (2.48)$$

Rappel: il y a sommation sur les indices répétés k et μ . Nous supposons que le champ ϕ_k , sa variation $\delta\phi_k$ et leurs dérivées s'annulent dans toutes les directions à l'infini de \mathcal{E} . On écrit $\delta\partial_\mu \phi_k = \partial_\mu \delta\phi_k$ et on intègre par parties en utilisant l'équation (1.106), avec $f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)}$ et $g = \delta\phi_k$. On obtient

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta \phi_k} \delta \phi_k d^4x \quad \text{où} \quad \frac{\delta S}{\delta \phi_k} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \right) \quad (2.49)$$

est la dérivée fonctionnelle. Pour que $\delta S = 0$ quelles que soient les variations $\delta\phi_k$, il faut que $\frac{\delta S}{\delta \phi_k} = 0$, soit

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} = 0.} \quad (2.50)$$

Ces N équations (pour $k = 1, \dots, N$) sont les *équations du mouvement* (*équations d'Euler-Lagrange pour un champ*).

Le *moment conjugué* de ϕ_k est le champ

$$\pi_{\phi_k}(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_k)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_k)} \quad (2.51)$$

et la *densité hamiltonienne* (*densité d'énergie*)

$$\mathcal{H}(x^\mu) = \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_k \pi_{\phi_k} - \mathcal{L} = \sum_{k=1}^N c(\partial_0 \phi_k) \pi_{\phi_k} - \mathcal{L}. \quad (2.52)$$

2.4 Lagrangien du champ électromagnétique

Considérons le champ électromagnétique pour un mouvement donné des particules (on se donne le quadricourant $j^\mu(x^\nu)$). Nous voulons le décrire avec une densité lagrangienne invariante $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{champ}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ telle que les

équations d'Euler-Lagrange (2.50) redonnent les équations de Maxwell. Le terme $\mathcal{L}_{\text{champ}}$ décrit le champ libre (sans particules) et \mathcal{L}_{int} est un terme d'interaction champ-particules que nous allons choisir pour retrouver le lagrangien d'interaction (2.19) dans le cas d'une particule. Pour une particule de charge q située en $\vec{R}(t)$ et de vitesse $\vec{V}(t)$ à l'instant t , le lagrangien d'interaction (2.19) s'écrit

$$\begin{aligned} L_{\text{int}} &= -q\phi(\vec{R}(t), t) + q\vec{A}(\vec{R}(t), t) \cdot \vec{V}(t) = \\ &= \int d^3x \left[-q\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{R}(t))\phi(\vec{x}, t) + q\vec{V}(t)\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{R}(t)) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right] \\ &= - \int d^3x \left[\rho(\vec{x}, t)\phi(\vec{x}, t) - \vec{J}(\vec{x}, t) \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right] = - \int d^3x j^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (2.53)$$

en introduisant le quadricourant (cf. équation (1.5)) de la particule. Cela conduit à poser

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu = -\rho\phi + \vec{J} \cdot \vec{A}} \quad (2.54)$$

pour la **densité lagrangienne d'interaction**. Comme \mathcal{L}_{int} s'écrit en fonction du quadripotential, nous allons décrire le champ électromagnétique par le quadripotential A_μ plutôt que par le tenseur $F_{\mu\nu}$. Nous déterminons le tenseur $F_{\mu\nu}$ par la relation $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. L'équation $\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = 0$ est alors automatiquement vérifiée (cf. propriété (1.138) de la section 1.16). Les équations d'Euler-Lagrange, qui s'écrivent ici ($\phi_k \rightarrow A_\nu$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0, \quad (2.55)$$

doivent nous donner l'équation $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$. Comme

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial A_\nu} = -j^\nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad (2.56)$$

nous pouvons chercher $\mathcal{L}_{\text{champ}}$ qui vérifie

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{champ}}}{\partial A_\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{champ}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Nous exprimerons la densité $\mathcal{L}_{\text{champ}}$, qui n'est pas une fonction explicite des A_μ , comme fonction explicite des $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, la rendant par là invariante de jauge. L'invariance de Lorentz de $\mathcal{L}_{\text{champ}}$ restreint les choix possibles. Nous posons, utilisant une expression quadratique des « vitesses » $\partial_\mu A_\nu$,

$$\mathcal{L}_{\text{champ}} = k F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (2.58)$$

où k est une constante à déterminer. Calculons

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha]}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu, \quad (2.59)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial [F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}]}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= F_{\alpha\beta} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta} \\ &= 2 [\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu] F^{\alpha\beta} = 2 [F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}] = 4F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

L'équation (2.58) satisfait à (2.57) pour $k = -1/4\mu_0$.

La densité lagrangienne du champ libre s'écrit donc

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{champ}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu_0 c^2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2)} \quad (2.61)$$

Le lagrangien total d'un système de N particules $i = 1, \dots, N$ et du champ électromagnétique est

$$\boxed{\begin{aligned} L &= L_{\text{part}} + L_{\text{champ}} + L_{\text{int}} \\ L_{\text{part}} &= \sum_{i=1}^N -m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{V_i^2}{c^2}} \\ L_{\text{champ}} &= \int \mathcal{L}_{\text{champ}} d^3x \\ L_{\text{int}} &= \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^3x. \end{aligned}} \quad (2.62)$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour le champ donnent les équations de Maxwell et celles pour les particules donnent les équations du mouvement de ces particules. Nous savons que ces équations d'Euler-Lagrange sont invariantes de jauge. Vérifions le directement sur le lagrangien. Dans une transformation de jauge $A^\alpha \rightarrow A'^\alpha = A^\alpha - \partial^\alpha \psi$, la densité lagrangienne $\mathcal{L}_{\text{champ}}$ est invariante (comme $F_{\alpha\beta}$) et la densité lagrangienne d'interaction $\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\alpha A_\alpha$ devient

$$\mathcal{L}'_{\text{int}} = -j^\alpha A_\alpha + j^\alpha \partial_\alpha \psi. \quad (2.63)$$

Comme

$$\int j^\alpha \partial_\alpha \psi d^4x = - \int (\partial_\alpha j^\alpha) \psi d^4x = 0, \quad (2.64)$$

pour un courant de quadridivergence nulle ($\partial_\alpha j^\alpha = 0$), l'action reste inchangée :

$$\frac{1}{c} \int \mathcal{L}'_{\text{int}} d^4x = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x. \quad (2.65)$$

2.5 Fonctionnelle, dérivée fonctionnelle

Une *fonctionnelle* $S[\phi]$ est une loi qui donne un nombre pour chaque fonction $\phi(x)$ définie sur un espace $\mathcal{M}^{(D)}$ de dimension D . Ce peut être l'action (2.47), pour $D = 4$, $\phi(x)$ désignant l'une des composantes $\phi_k(x)$; ce peut aussi être l'action (2.1), pour $D = 1$, $\phi(x)$ désignant une des fonctions $x^i(t)$. Dans ces exemples, nous avons introduit, équations (2.6) et (2.49), la dérivée fonctionnelle à partir de la petite variation $\delta\phi(x)$ de la fonction $\phi(x)$ en écrivant

$$\delta S = S[\phi + \delta\phi(x)] - S[\phi] = \int \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} \delta\phi(y) d^D y + \dots \quad (2.66)$$

où on ne garde que les termes du premier ordre en $\delta\phi(x)$. La dérivée fonctionnelle $\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}$ dépend de la fonction $\phi(x)$ et du point $y \in \mathcal{M}^{(D)}$: c'est une fonctionnelle de $\phi(x)$ et une fonction de y . *Quelques exemples* :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad S &= \int \phi^2(x) d^D x & \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} &= 2\phi(y) \\ \text{(b)} \quad S &= \int u(x)\phi^4(x) d^D x & \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} &= 4u(y)\phi^3(y) \\ \text{(c)} \quad S &= \int \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 d^3 x & \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} &= -\Delta_y \phi(y) \quad (D = 3) \\ \text{(d)} \quad S &= \phi(x) & \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} &= \delta^{(D)}(x - y) \quad (\text{fonction de Dirac}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Autres définitions équivalentes :

1) L'équation (2.66) s'écrit, pour la variation $\delta\phi(x) = \epsilon f(x)$ (ϵ infiniment petit),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S[\phi(x) + \epsilon f(x)] - S[\phi(x)]}{\epsilon} = \int \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} f(x) d^D x. \quad (2.68)$$

En prenant pour $f(x)$ la fonction de Dirac $f(x) = \delta^{(D)}(x - y)$, on obtient une définition formelle de la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta\phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S[\phi(x) + \epsilon\delta^{(D)}(x - y)] - S[\phi(x)]}{\epsilon} \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} S[\phi(x) + \epsilon\delta^{(D)}(x - y)] \right|_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Par exemple, pour $S[\phi(x)] = \phi(x)$, cela donne

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \left. \frac{d}{d\epsilon} (\phi(x) + \epsilon\delta^{(D)}(x - y)) \right|_{\epsilon=0} = \delta^{(D)}(x - y). \quad (2.70)$$

2) Divisons l'espace $\mathcal{M}^{(D)}$ en petits cubes de volume $\omega = \epsilon^D$, le cube i étant centré au point x_i . La fonction $\phi(x)$ est définie approximativement en donnant la valeur ϕ_i qu'elle prend à chaque point x_i . Une fonctionnelle comme $S[\phi(x)] = \int u(x)\phi^4(x) d^D x$ est approximativement la fonction ordinaire des variables ϕ_i

$$S_\omega(\dots, \phi_i, \phi_{i+1}, \dots) = \sum_i \omega u_i \phi_i^4 \quad (2.71)$$

avec $u_i = u(x_i)$. La dérivée fonctionnelle apparaît alors comme la limite $\omega \rightarrow 0$ des dérivées partielles par rapport aux variables discrète ϕ_i :

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \frac{\partial S_\omega}{\partial \phi_i} \quad (2.72)$$

Preuve: Posons $\delta \phi_i = \delta \phi(x_i)$ et $F_i = \frac{1}{\omega} \frac{\partial S_\omega}{\partial \phi_i}$. La variation de la fonction $S_\omega(\dots, \phi_i, \phi_{i+1}, \dots)$, $\delta S_\omega = \sum_i \frac{\partial S_\omega}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = \sum_i \omega F_i \delta \phi_i$, devient, dans limite $\omega \rightarrow 0$, l'intégrale $\int F(x) \delta \phi(x) d^D x$ avec $F(x) = \lim_{\omega \rightarrow 0} F_i$. On obtient (2.72) en comparant à (2.66).

Il résulte de la définition (2.72) que la dérivation fonctionnelle a des propriétés semblables aux dérivations partielles.

Règles de calculs pratiques

1) Rappelons l'équation (2.70) qui traduit l'indépendance des variables $\delta \phi(x)$ et $\delta \phi(y)$ pour $x \neq y$ et est qui analogue à $\frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_j} = \delta_{ij}$:

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta^{(D)}(x - y). \quad (2.73)$$

2) $\frac{\delta}{\delta \phi(y)}$ commute avec l'intégration $\int d^D x$ (utiliser des noms différents pour la variable d'intégration x et le point y localisant la variable de dérivation $\phi(y)$).

3) $\frac{\delta}{\delta \phi(y)}$ commute avec les dérivées ∂_μ .

4) $\frac{\delta}{\delta \phi(y)}$ est une dérivation (au sens mathématique). On a

$$\begin{aligned} \frac{\delta(A+B)}{\delta \phi(y)} &= \frac{\delta A}{\delta \phi(y)} + \frac{\delta B}{\delta \phi(y)}, & \frac{\delta(AB)}{\delta \phi(y)} &= \frac{\delta A}{\delta \phi(y)} B + A \frac{\delta B}{\delta \phi(y)}, \\ \frac{\delta f(A)}{\delta \phi(y)} &= \frac{df}{dA} \frac{\delta A}{\delta \phi(y)}, & \text{etc.} & \quad (2.74) \end{aligned}$$

5) Dans une transformation du champ, comme par exemple la transformation de Fourier⁵ $\psi(p) = \int e^{ip_\mu x^\mu} \phi(x) d^D x$, on peut considérer S comme une fonctionnelle de $\phi(x)$ ou de $\psi(p)$. On a alors

$$\frac{\delta S[\psi]}{\delta \psi(p)} = \int \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \psi(p)} d^D x \quad \text{à comparer à} \quad \frac{\partial S}{\partial \psi_i} = \sum_j \frac{\partial S}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \psi_i}. \quad (2.75)$$

L'intérêt de ce formalisme est de permettre d'écrire le principe de moindre action sans mentionner les équations d'Euler-Lagrange.

Exemples

1) On pouvait obtenir (2.67) (a) avec ces règles par

$$\frac{\delta \phi^2(x)}{\delta \phi(y)} = 2\phi(x) \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = 2\phi(x) \delta^{(D)}(x - y) \quad (2.76)$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int \phi^2(x) d^D x = \int \frac{\delta \phi^2(x)}{\delta \phi(y)} d^D x = \int 2\phi(x) \delta^{(D)}(x - y) d^D x = 2\phi(y). \quad (2.77)$$

2) Soit le champ $\phi(x)$ sur l'espace-temps \mathcal{E} régi par l'action

$$S[\phi] = \frac{k}{2} \int \left[(\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right] d^4 x \quad (2.78)$$

où la constante k est là pour l'homogénéité. Calculons la dérivée fonctionnelle

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \frac{1}{2} \int (\partial^\mu \phi(x)) (\partial_\mu \phi(x)) d^4 x \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\left(\partial^\mu \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \right) (\partial_\mu \phi(x)) + (\partial^\mu \phi(x)) \left(\partial_\mu \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \right) \right] d^4 x \\ &= \int \left(\partial^\mu \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \right) (\partial_\mu \phi(x)) d^4 x = \int \left(\partial^\mu \delta^{(D)}(x - y) \right) (\partial_\mu \phi(x)) d^4 x \\ &= - \int \delta^{(D)}(x - y) \partial^\mu \partial_\mu \phi(x) d^4 x = -\square_y \phi(y). \end{aligned}$$

Avec (2.77), le principe de moindre action $\frac{\delta S}{\delta \phi(y)} = 0$ donne l'équation de Klein⁶-Gordon⁷ d'une particule libre :

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi = 0. \quad (2.79)$$

5. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

6. Oskar Klein (1894-1977)

7. Walter Gordon (1893-1939)

3) Reprenons l'action $S[A_\mu]$ du champ électromagnétique pour un quadricourant donné (on reprend (2.47) avec (2.54) et (2.61)) :

$$S[A_\mu] = \frac{1}{c} \int \left(-j^\nu A_\nu - \frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) d^4x. \quad (2.80)$$

Le calcul de $\frac{\delta S}{\delta A_\mu(y)}$ utilise

$$\frac{\delta A_\nu(x)}{\delta A_\mu(y)} = \delta_\nu^\mu \delta^{(4)}(x - y),$$

$$\frac{\delta F_{\alpha\beta}(x)}{\delta A_\mu(y)} = \partial_\alpha \frac{\delta A_\beta(x)}{\delta A_\mu(y)} - \partial_\beta \frac{\delta A_\alpha(x)}{\delta A_\mu(y)} = \delta_\beta^\mu \partial_\alpha \delta^{(4)}(x - y) - \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \delta^{(4)}(x - y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \frac{1}{4\mu_0} \int F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} d^4x &= \frac{1}{2\mu_0} \int F^{\alpha\beta} \left[\delta_\beta^\mu \partial_\alpha \delta^{(4)}(x - y) - \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \delta^{(4)}(x - y) \right] d^4x \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int F^{\alpha\mu} \partial_\alpha \delta^{(4)}(x - y) d^4x \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int (\partial_\alpha F^{\alpha\mu}) \delta^{(4)}(x - y) d^4x = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\alpha F^{\alpha\mu}(y) \end{aligned}$$

et $\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \int j^\nu A_\nu d^4x = \int j^\nu \frac{\delta A_\nu(x)}{\delta A_\mu(y)} d^4x = j^\mu(y)$. Le principe de moindre action $\frac{\delta S}{\delta A_\mu(y)} = 0$ redonne bien (1.123) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$.

4) Les variations $\delta S, \delta\phi(x), \dots$ se manipulent comme des différentielles et ont des propriétés correspondant aux règles précédentes de calculs pratiques de la dérivation fonctionnelle. Appliquons ces manipulations de différentiation fonctionnelle pour écrire le principe de moindre action d'une charge dans un champ électromagnétique extérieur. L'action (2.18) est une fonctionnelle des $x^\mu(t)$:

$$S[x^\mu] = \int_{t_1}^{t_2} (-mcds - qA_\nu dx^\nu). \quad (2.81)$$

Pour simplifier, on note δx_μ au lieu de $\delta x_\mu(t)$. La différentiation fonctionnelle de $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$ donne $ds\delta ds = dx^\mu d\delta x_\mu$. D'où $\delta ds = \frac{u^\mu}{c} d\delta x_\mu$.

On a $\delta A_\nu = (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu$, $\delta dx^\mu = d\delta x^\mu$, $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} [-mcds - qA_\nu dx^\nu] = \int_{t_1}^{t_2} [-mu^\mu d\delta x_\mu - q(\partial^\mu A_\nu) \delta x_\mu dx^\nu - qA^\mu d\delta x_\mu] = \int_{t_1}^{t_2} [mdu^\mu - q(\partial^\mu A_\nu) dx^\nu + q(dA^\mu)] \delta x_\mu$. Avec $dA^\mu = (\partial_\nu A^\mu) dx^\nu$, on obtient :

$$\delta S[x^\rho] = \int_{t_1}^{t_2} [mdu^\mu - q(\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu) dx^\nu] \delta x_\mu.$$

Le principe de moindre action $\delta S[x^\rho] = 0$ donne $mdu^\mu = qF^\mu{}_\nu dx^\nu$, ce qui après division par $d\tau$ est la forme covariante (1.135) de l'équation du mouvement :

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu} u_\nu. \quad (2.82)$$

3

Tenseur énergie-impulsion

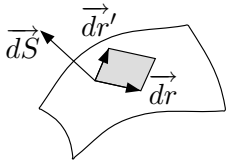


FIG. 3.1 – Élément de surface.

3.1 Intégrales sur une hypersurface

3.1.1 Flux d'un quadrivecteur

L'élément de surface dans l'espace à 3 dimensions est un parallélogramme défini par 2 vecteurs infinitésimaux de la surface \vec{dr} et \vec{dr}' (cf. figure 3.1). Le vecteur \vec{dS} est défini par (le signe est fixé par l'orientation de la surface)

$$\vec{dS} = \pm \vec{dr} \wedge \vec{dr}' \quad \text{ou} \quad dS^i = \pm e^{ijk} dr^j dr'^k. \quad (3.1)$$

Le flux d'un vecteur \vec{A} à travers une surface orientable \mathcal{S} dans l'espace à 3 dimensions est la somme des flux élémentaires à travers les éléments de surface dS :

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \vec{dS}. \quad (3.2)$$

La définition (3.2) se généralise à l'espace-temps \mathcal{E} . L'élément d'hyper-surface dans l'espace-temps à 4 dimensions est un parallélépipède défini par 3 quadrivecteurs infinitésimaux de la surface \vec{dr} , \vec{dr}' et \vec{dr}'' (cf. figure 3.2). Le quadrivecteur \vec{dS} , orthogonal à la surface est défini par (le signe est fixé par l'orientation de l'hyper-surface)

$$dS^\mu = \pm \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dr_\nu dr'_\rho dr''_\sigma. \quad (3.3)$$

Le flux d'un quadrivecteur \vec{a} à travers une hypersurface orientable \mathcal{S} dans l'espace à 4 dimensions \mathcal{E} est la somme des flux élémentaires $\vec{a} \cdot \vec{dS}$ à travers les éléments d'hyper-surface dS :

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{a} \cdot \vec{dS} = \int_{\mathcal{S}} a_\mu dS^\mu. \quad (3.4)$$

D'après la définition, Φ est un invariant scalaire. Pour l'hyperplan $x^0 = ct_0$ on peut prendre

$$\vec{dr} = \vec{e}_1 dx^1, \quad \vec{dr}' = \vec{e}_2 dx^2, \quad \vec{dr}'' = \vec{e}_3 dx^3 \quad (3.5)$$

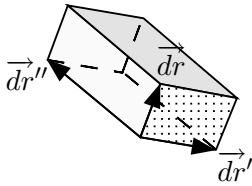


FIG. 3.2 – Élément d'hyper-surface.

et

$$\vec{dS} = \pm \vec{e}_0 dx^1 dx^2 dx^3 = \pm \vec{e}_0 d^3x. \quad (3.6)$$

Cela donne pour le flux du quadrivecteur l'intégrale spatiale de la composante temporelle du quadrivecteur à l'instant t_0 :

$$\Phi = \pm \int a_0(\vec{r}, t_0) d^3x. \quad (3.7)$$

3.1.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss à 3 dimensions

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \int_{\partial\Omega} A^i dS_i \quad (3.8)$$

se généralise aux intégrales de l'espace temps :

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} a^{\mu} d^4x = \int_{\partial\Omega} a^{\mu} dS_{\mu}. \quad (3.9)$$

Le bord du volume quadridimensionnel Ω est l'hypersurface $\partial\Omega$. On oriente $\partial\Omega$ de sorte que \vec{dS} soit à l'extérieur de Ω .

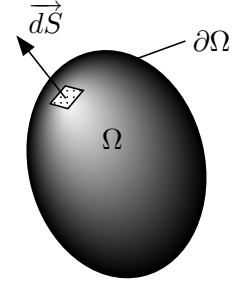


FIG. 3.3 – Hypervolume Ω et hypersurface $\partial\Omega$.

3.1.3 Quadrivecteur de quadridivergence nulle

Soit $\vec{a}(\vec{r}, t)$ un champ de quadrivecteur, localisé dans le volume spatial V ($\vec{a}(\vec{r}, t) = 0$ pour $\vec{r} \notin V$), de quadridivergence nulle ($\partial_{\mu} a^{\mu} = 0$). Le flux sortant (3.9) est nul.

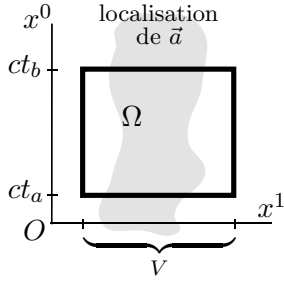


FIG. 3.4.

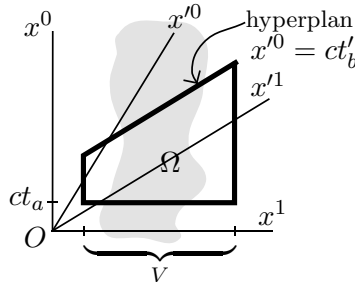


FIG. 3.5.

FIG. 3.4 – Conservation de Q .

FIG. 3.5 – Invariance de Q .

Exprimons le flux sortant du volume quadridimensionnel $\Omega = [ct_a, ct_b] \times V$ de la figure 3.4. On obtient, en étendant les intégrales à tout l'espace

$$\int a^0(\vec{r}, t_a) d^3x = \int a^0(\vec{r}, t_b) d^3x. \quad (3.10)$$

Pour le quadricourant \vec{j} , qui vérifie l'équation de continuité $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, le résultat (3.10) est la conservation de la charge $\int \rho(\vec{r}, t) d^3x$.

Exprimons maintenant le flux sortant du volume Ω de la figure 3.5. Le volume quadridimensionnel Ω est l'intersection de $[-\infty, +\infty] \times V$ et des demi-espaces $x^0 \geq ct_a$ et $x^0 \leq ct'_b$ où x^0 est la coordonnée temporelle du référentiel K' . On utilise les deux référentiels d'inertie K et K' correspondant à la figure 1.3. Pour calculer le flux sortant de l'hypersurface $x^0 = ct'_b$ on utilise l'invariance du flux (3.4). On l'écrit dans K' , a^0 étant donné par l'équation (1.56). On obtient, en étendant les intégrales à tout l'espace,

$$\int a^0(\vec{r}, t_a) d^3x = \int a'^0(\vec{r}', t'_b) d^3x'. \quad (3.11)$$

Pour le quadricourant \vec{j} , c'est l'invariance de la charge

$$\int \rho(\vec{r}, t) d^3x = \int \rho'(\vec{r}', t') d^3x'.$$

Regroupant (3.10) et (3.11), on a obtenu :

<p>si $a^\mu(x^\nu)$ est un champ de quadrivecteur vérifiant $\partial_\mu a^\mu = 0$, alors</p> $Q = \frac{1}{c} \int a^0 d^3x \quad (3.12)$ <p>est un scalaire invariant conservé.</p>
--

On généralise à un champ de tenseur $T^{\mu\nu}$ tel que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Posons

$$p^\nu = \frac{1}{c} \int T^{0\nu} d^3x. \quad (3.13)$$

En appliquant (3.12) au champ de quadrivecteur $a^\mu = T^{\mu\nu} f_\nu$, où f_μ est une 1-forme arbitraire, on obtient que $p^\nu f_\nu$ est un invariant scalaire conservé, et donc que p^ν est un **quadrivecteur indépendant du temps**.

De même, pour un champ de tenseur $M^{\mu\nu\rho}$ tel que $\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$,

$$L^{\nu\rho} = \frac{1}{c} \int M^{0\nu\rho} d^3x \quad (3.14)$$

est un **tenseur indépendant du temps**.

3.2 Tenseur énergie-impulsion

3.2.1 Interprétation physique des composantes

Considérons un système isolé formé de N particules ponctuelles $a = 1, \dots, N$; la particule a , de masse m_a et de charge q_a , se trouve en $\vec{x}_a(t)$. Le champ électromagnétique créé par ces particules est inclus dans le système. Nous voulons exprimer dans le formalisme relativiste les lois de conservation

de l'énergie W , de la quantité de mouvement \vec{P} et du moment cinétique \vec{L} du système. La quadriimpulsion $\vec{p} = p^\mu = \left(\frac{W}{c}, \vec{P} \right)$ du système est conservée. Nous voulons donc l'écrire sous la forme (3.13)

$$p^\nu = \frac{1}{c} \int T^{0\nu} d^3x \quad (3.15)$$

où $T^{\mu\nu}$ est un champ de tenseur (*tenseur énergie-impulsion*) tel que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.16)$$

Les propriétés d'invariance et de conservation de \vec{p} seront alors automatiquement vérifiées.

Remarquons que les seules équations (3.15) et (3.16) laissent encore beaucoup de latitude dans le choix de $T^{\mu\nu}$. Ainsi, partant d'un $T^{\mu\nu}$ vérifiant (3.15) et (3.16) le tenseur

$$T^{\mu\nu} + \partial_\rho \psi^{\rho\mu\nu}, \quad (3.17)$$

où $\psi^{\rho\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique sur les deux premiers indices ($\psi^{\rho\mu\nu} = -\psi^{\mu\rho\nu}$), vérifie également (3.15) et (3.16).

Examinons les propriétés physiques souhaitables de $T^{\mu\nu}$, pour réduire les choix possibles. Postulons que $\Delta W = T^{00} d^3x$ et $\Delta \vec{P}$ de composantes $\Delta P^i = T^{0i} d^3x/c$ sont l'énergie et la quantité de mouvement du volume élémentaire d^3x . Autrement dit on a l'interprétation

$\begin{aligned} T^{00} = u_s &\longleftrightarrow \text{densité d'énergie du système} \\ T^{0i} = cg_s^i &\longleftrightarrow \text{densité } \vec{g}_s \text{ de quantité de mouvement du système.} \end{aligned}$
--

(3.18)

Le moment cinétique du système par rapport à O est alors

$$\vec{L} = \int \vec{r} \wedge \Delta \vec{P} = \int \vec{r} \wedge \vec{g}_s d^3x \quad (3.19)$$

et la position du centre d'énergie du système est

$$\vec{X} = \frac{1}{W} \int \vec{r} \Delta W = \frac{1}{W} \int \vec{r} T^{00} d^3x. \quad (3.20)$$

Posons

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) d^3x = \frac{1}{c} \int M^{0\mu\nu} d^3x \quad (3.21)$$

où

$$M^{\rho\mu\nu} = (x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu}). \quad (3.22)$$

Ici, x^μ désigne les composantes du quadrivecteur $\overrightarrow{\mathcal{OM}}$ qui joint l'origine au point d'intégration. $M^{\rho\mu\nu}$ est alors un tenseur. Le tenseur antisymétrique $L^{\mu\nu}$ contient le moment cinétique ($L^1 = L^{23}$, $L^2 = L^{31}$ et $L^3 = L^{12}$). Les composantes supplémentaires sont

$$L^{0i} = t \int T^{0i} d^3x - \frac{1}{c} \int x^i T^{00} d^3x = \frac{W}{c} (V^i t - X^i) \quad (3.23)$$

en posant $V^i = \frac{c^2 P^i}{W}$ (\vec{V} est la vitesse du système dans son ensemble; elle est reliée à la quantité de mouvement totale \vec{P} et à l'énergie totale W par la même relation $\vec{P} = \frac{W}{c^2} \vec{V}$ que pour une particule). Le tenseur $L^{\mu\nu}$ est conservé. Comparant à (3.14), on souhaite donc que $\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = 0$, soit

$$\underbrace{(\partial_\rho x^\mu)}_{\delta_{\rho\mu}} T^{\rho\nu} + x^\mu \underbrace{(\partial_\rho T^{\rho\nu})}_0 - \underbrace{(\partial_\rho x^\nu)}_{\delta_{\rho\nu}} T^{\rho\mu} - x^\nu \underbrace{(\partial_\rho T^{\rho\mu})}_0 = 0 \quad (3.24)$$

ou

$$\boxed{T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}} \quad (\text{le tenseur énergie-impulsion est symétrique}). \quad (3.25)$$

La densité d'énergie $u_s = T^{00}$ vérifie l'équation de continuité (autre écriture de $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$)

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S}_s = -\partial_j S_s^j \quad \text{où} \quad S_s^i = c T^{i0}. \quad (3.26)$$

La densité $g_s^i = \frac{T^{0i}}{c}$ de quantité de mouvement vérifie l'équation de continuité (autre écriture de $\partial_\mu T^{\mu i} = 0$)

$$\frac{\partial g_s^i}{\partial t} = -\partial_j T^{ji}. \quad (3.27)$$

L'énergie W_Ω , la quantité de mouvement \vec{P}_Ω et moment cinétique \vec{L}_Ω d'un volume tridimensionnel Ω sont respectivement

$$W_\Omega = \int_\Omega u_s d^3x, \quad \vec{P}_\Omega = \int_\Omega \vec{g}_s d^3x \quad \text{et} \quad \vec{L}_\Omega = \int_\Omega \vec{r} \wedge \vec{g}_s d^3x. \quad (3.28)$$

Calculons leurs dérivées par rapport à t . On a, en utilisant le théorème de Gauss (3.8),

$$\frac{dW_\Omega}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial u_s}{\partial t} d^3x = - \int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_s d^3x = - \int_{\partial\Omega} \vec{S}_s \cdot \vec{dS} \quad (3.29)$$

et

$$\frac{dP_\Omega^i}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial g_s^i}{\partial t} d^3x = - \int_\Omega \partial_j T^{ji} d^3x = - \int_{\partial\Omega} T^{ji} dS_j. \quad (3.30)$$

Introduisons le tenseur $\sigma^{ji} = -T^{ji}$ et la force infinitésimale \vec{df}

$$df^i = -T^{ji} dS_j = \sigma^{ji} dS_j. \quad (3.31)$$

Pour la dérivée de la composante L_Ω^1 de \vec{L}_Ω , on a

$$\begin{aligned} \frac{dL_\Omega^1}{dt} &= \int_\Omega \partial_0 M^{023} d^3x = - \int_\Omega \partial_k M^{k23} d^3x = - \int_{\partial\Omega} M^{k23} dS_k \\ &= \int_{\partial\Omega} (x^2 \sigma^{k3} - x^3 \sigma^{k2}) dS_k = \int_{\partial\Omega} (x^2 df^3 - x^3 df^2) = \int_{\partial\Omega} (\vec{r} \wedge \vec{df})^1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vectoriellement,

$$\frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} = \int_{\partial\Omega} \vec{df} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \int_{\partial\Omega} \vec{r} \wedge \vec{df} \quad (3.33)$$

expriment que les forces agissant sur le volume Ω sont équivalentes au système des forces surfaciques \vec{df} .

La figure 3.6 donne l'analogie avec le tenseur des contraintes σ^{ji} d'un fluide. Le vecteur \vec{dS} est orienté vers l'extérieur du volume Ω . La force \vec{df} agissant sur l'élément de surface dS est donné par

$$df^i = \sigma^{ji} dS_j = (-p\delta_{ij} + \sigma'^{ji}) dS_j. \quad (3.34)$$

Pour $\sigma'^{ji} = 0$ (pas de viscosité), la force \vec{df} est la force de pression $-p\vec{dS}$. En présence de viscosité, \vec{df} n'est pas perpendiculaire à la surface.

On peut compléter l'interprétation (3.18) des composantes de $T^{\mu\nu}$:

$T^{i0} = \frac{S_s^i}{c}$	\longleftrightarrow	courant d'énergie \vec{S}_s du système
$T^{ij} = -\sigma^{ij}$	\longleftrightarrow	courant de quantité de mouvement du système tenseur des contraintes σ^{ij}

(3.35)

et écrire sous forme matricielle :

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} u_s & c\vec{g}_s \\ \hline \vec{S}_s/c & -\sigma^{ij} \end{array} \right). \quad (3.36)$$

La symétrie du tenseur implique la relation

$$\vec{S}_s = c^2 \vec{g}_s \quad (3.37)$$

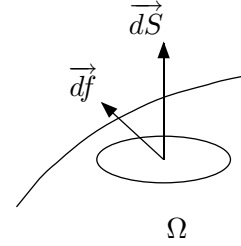


FIG. 3.6 – Tenseur des contraintes σ^{ji} d'un fluide.

entre le courant d'énergie \vec{S}_s et la densité \vec{g}_s de quantité de mouvement du système.

On remarquera l'analogie formelle entre le quadricourant j^μ et le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$. Les propriétés (3.18), (3.35) et (3.36) sont analogues aux propriétés bien connues :

$$\begin{aligned} j^0 = \rho c &\longleftrightarrow \text{densité de charge } \rho \\ j^i = J^i &\longleftrightarrow \text{densité de courant } \vec{J} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{J} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

3.2.2 Décomposition $T^{\mu\nu} = T_{\text{part}}^{\mu\nu} + T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$

Une autre propriété physique souhaitable est l'additivité de l'énergie et de la quantité de mouvement. Ainsi nous postulons que la quadriimpulsion \vec{p} du système est la somme

$$\vec{p} = \vec{p}_{\text{part}} + \vec{p}_{\text{champ}} \quad \text{avec} \quad \vec{p}_{\text{part}} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a, \quad (3.40)$$

où $\vec{p}_a = m_a \vec{u}_a$ (resp. \vec{u}_a) est la quadriimpulsion (resp. quadrivitesse) de la particule a et \vec{p}_{champ} la quadriimpulsion du champ. Le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ du système se décompose de même en

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{part}}^{\mu\nu} + T_{\text{champ}}^{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad T_{\text{part}}^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^N T_a^{\mu\nu}, \quad (3.41)$$

où le tenseur énergie-impulsion $T_a^{\mu\nu}$ est associé à la particule a et le tenseur énergie-impulsion $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ au champ.

3.2.3 Tenseur énergie-impulsion d'une particule

Nous allons déterminer, dans un référentiel K , le tenseur énergie-impulsion $T_a^{\mu\nu}$ de la particule a par la condition

$$\int_{\Omega} T_a^{0\nu} d^3x = \begin{cases} cp_a^\nu & \text{si la particule est dans le volume } \Omega \\ 0 & \text{si la particule n'est pas dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.42)$$

Cette condition donne

$$T_a^{0\nu} = cp_a^\nu \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)). \quad (3.43)$$

Procédons comme dans la section 1.7, où on a utilisé un référentiel K' comobile avec la particule. La masse volumique

$$\mu_a(\mathcal{M}) = \mu_a(\vec{r}, t) = m_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) \quad (3.44)$$

dans le référentiel K est liée à la masse volumique μ_{a0} dans le référentiel K' par

$$\mu_a(\mathcal{M}) = \gamma \mu_{a0}(\mathcal{M}). \quad (3.45)$$

analogue à l'équation (1.52). Dans le référentiel comobile, le tenseur énergie-impulsion $T_a^{\mu\nu}$ s'écrit

$$T_a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mu_{a0}c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

puisque la quantité de mouvement, les courants d'énergie et de quantité de mouvement sont nuls. Une écriture covariante de ce tenseur est

$$\boxed{T_a^{\mu\nu} = \mu_{a0} u_a^\mu u_a^\nu.} \quad (3.47)$$

Dans K , utilisant (3.44), (3.45) et $u_a^\mu = \gamma \frac{dx_a^\mu}{dt}$, cette expression donne

$$T_a^{\mu\nu} = \frac{m_a}{\gamma} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) u_a^\mu u_a^\nu = m_a u_a^\nu \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dt}, \quad (3.48)$$

soit

$$\boxed{T_a^{\mu\nu} = p_a^\nu(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dt}(t),} \quad (3.49)$$

dont les composantes $T_a^{0\nu}$ sont bien (3.43). Le tenseur énergie-impulsion $T_a^{\mu\nu}$ est bien symétrique, d'après la forme (3.47).

Lorsque la particule interagit avec le champ, sa quadriimpulsion varie et n'est pas conservée. On s'attend donc à ce que $\partial_\mu T_a^{\mu\nu} \neq 0$. Calculons sa valeur. Additionnons la dérivée de (3.43),

$$\partial_0 T_a^{0\nu} = \frac{dp_a^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) - p_a^\nu \frac{dx_a^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)), \quad (3.50)$$

et celles de (3.49), pour $\mu = i$,

$$\partial_i T_a^{i\nu} = p_a^\nu \frac{dx_a^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)). \quad (3.51)$$

Cela donne, en utilisant l'équation du mouvement (1.135)

$$\frac{dp_a^\nu}{d\tau} = q_a F^\nu{}_\sigma u_a^\sigma = q_a F^\nu{}_\sigma \frac{dx_a^\sigma}{d\tau},$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_a^{\mu\nu} &= \frac{dp_a^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) = F^\nu{}_\sigma \frac{dx_a^\sigma}{dt} q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) = F^\nu{}_\sigma \rho_a \frac{dx_a^\sigma}{dt} \\ &= F^\nu{}_\sigma j_a^\sigma \end{aligned} \quad (3.52)$$

où $\rho_a(\vec{r}, t) = q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t))$ est la densité de charge de la particule a et \vec{j}_a le quadricourant associé.

3.2.4 Tenseur énergie-impulsion des particules

Le tenseur énergie-impulsion des particules est la somme

$$T_{\text{part}}^{\mu\nu} = \sum_a T_a^{\mu\nu} = \sum_a p_a^\nu(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) \frac{dx_a^\mu}{dt}(t). \quad (3.53)$$

D'après (3.52), il vérifie l'équation

$$\partial_\mu T_{\text{part}}^{\mu\nu} = F^\nu{}_\rho j^\rho = h^\nu. \quad (3.54)$$

Explicitement, le quadrivecteur h^ν est

$$h^\nu = F^\nu{}_\rho j^\rho = (h^0, \vec{h}) = \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{J}}{c}, \rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} \right). \quad (3.55)$$

La quadriimpulsion \vec{p}_{part} des particules n'est pas conservée en général :

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\text{part}}^\nu}{dt} &= \int \partial_0 T_{\text{part}}^{0\nu} d^3x = \int \partial_\mu T_{\text{part}}^{\mu\nu} d^3x \quad [\text{car } \int \partial_i T_{\text{part}}^{i\nu} d^3x = 0] \\ &= \int F^\nu{}_\rho j^\rho d^3x = \int h^\nu d^3x. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Remarquer que l'intégrale spatiale du quadrivecteur h^ν ne donne pas un quadrivecteur au contraire de l'intégrale (3.13). Le vecteur \vec{h} s'interprète comme la densité volumique des forces agissant sur les particules, tandis que ch^0 est le travail accompli par les forces agissant sur les particules par unité de volume et de temps.

La trace du tenseur $T_{\text{part}}^{\mu\nu}$ s'exprime en fonction de la densité de masse au repos $\mu_0 = \sum_a \mu_{a0}$ du système :

$$\text{Tr } \mathbf{T}_{\text{part}} = g_{\mu\nu} T_{\text{part}}^{\mu\nu} = \sum_a T_a^\mu{}_\mu = \sum_a \mu_{a0} u_a^\mu u_{a\mu} = \sum_a \mu_{a0} c^2 = \mu_0 c^2. \quad (3.57)$$

3.2.5 Tenseur énergie-impulsion du champ

Nous allons déterminer un tenseur symétrique $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ s'exprimant seulement en fonction du tenseur du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ et vérifiant l'équation

$$\partial_\mu T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = -F^\nu{}_\rho j^\rho. \quad (3.58)$$

La condition $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T_{\text{part}}^{\mu\nu} + \partial_\mu T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = 0$ sera alors remplie. Portons l'équation de Maxwell $j^\rho = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\rho}$ dans $h^\nu = F^\nu{}_\rho j^\rho$ et essayons de former une quadridivergence.

$$h^\nu = \frac{1}{\mu_0} F^\nu{}_\rho (\partial_\mu F^{\mu\rho}) = \frac{1}{\mu_0} [\partial_\mu (F^\nu{}_\rho F^{\mu\rho}) - F^{\mu\rho} (\partial_\mu F^\nu{}_\rho)]. \quad (3.59)$$

Il faut transformer le dernier terme :

$$\begin{aligned} F_{\mu\rho} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) &= \frac{1}{2} F_{\mu\rho} \partial^\mu F^{\nu\rho} + \frac{1}{2} F_{\rho\mu} \partial^\mu F^{\rho\nu} \quad [\text{antisymétrie de } F^{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\rho} (\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\rho F^{\mu\nu}) \quad [\text{échange de } \rho \text{ et } \mu \text{ au second terme}] \\ &= -\frac{1}{2} F_{\mu\rho} (\partial^\nu F^{\rho\mu}) \quad [\text{équation de Maxwell (1.126)}] \\ &= \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} (\partial^\nu F^{\rho\sigma}) = \frac{1}{4} \partial^\nu (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) = \frac{1}{4} \partial_\mu (g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Portant dans (3.59), on a

$$h^\nu = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \left[F^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right]. \quad (3.61)$$

Le tenseur

$$\boxed{T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F^\mu{}_\rho F^{\rho\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right]} \quad (3.62)$$

vérifie (3.58), est symétrique et dépend seulement du champ électromagnétique. C'est le **tenseur énergie-impulsion du champ**.

3.2.6 Composantes de $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$

Écrivons les composantes du tenseur $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ de façon analogue à (3.36) :

$$\boxed{T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & c\vec{g} \\ \vec{S}/c & -T_{(M)}^{ij} \end{pmatrix}}. \quad (3.63)$$

Explicitant $F^{\mu\nu}$ dans (3.62) on obtient

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad (3.64)$$

$$\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (3.65)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (3.66)$$

$$T_{(M)}^{ij} = \epsilon_0 \left[E^i E^j + c^2 B^i B^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + c^2 B^2) \right] \quad (3.67)$$

Les interprétation physique des composantes du tenseur $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ sont analogues à (3.18) et (3.35) :

$T_{\text{champ}}^{00} = u$	\longleftrightarrow	densité d'énergie électromagnétique
$T_{\text{champ}}^{0i} = c g^i$	\longleftrightarrow	densité \vec{g} de quantité de mouvement du champ
$T_{\text{champ}}^{i0} = \frac{S^i}{c}$	\longleftrightarrow	vecteur de Poynting ¹ \vec{S}
$T_{\text{champ}}^{ij} = -T_{(M)}^{ij}$	\longleftrightarrow	tenseur des contraintes de Maxwell $T_{(M)}^{ij}$.

(3.68)

La symétrie du tenseur implique la relation

$$\boxed{\vec{S} = c^2 \vec{g}.} \quad (3.69)$$

La trace du tenseur $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ est nulle (masse des photons nulle) :

$$\text{Tr } \mathbf{T}_{\text{champ}} = g_{\mu\nu} T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F_{\mu\rho} F^{\rho\mu} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\mu F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right] = 0. \quad (3.70)$$

En récrivant l'équation (3.58)

$$\partial_\mu T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = -h^\nu \quad (3.71)$$

avec les notations (3.63), on obtient le théorème de Poynting. La composante $\nu = 0$ donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (3.72)$$

(forme locale de la conservation de l'énergie). La composante $\nu = i$ donne

$$\frac{\partial g^i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^j} T_{(M)}^{ji} = -(\rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B})^i \quad (3.73)$$

(forme locale de la conservation de l'impulsion).

1. John Henry Poynting (1852-1914)

Les équations (3.29) et (3.30), donnant les dérivées de l'énergie totale W_Ω (champ et particules) et de la quantité de mouvement totale \vec{P}_Ω d'un volume tridimensionnel Ω , s'écrivent, dans le cas où les particules ne traversent pas la surface $\partial\Omega$ ($T_{\text{part}}^{\mu\nu}$, équation (3.53), est alors nul sur $\partial\Omega$),

$$\frac{dW_\Omega}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot \vec{dS} \quad (3.74)$$

$$\frac{dP_\Omega^i}{dt} = \int_{\partial\Omega} T_{(M)}^{ji} dS_j. \quad (3.75)$$

La force infinitésimale (3.31) appliquée sur l'élément de surface dS s'exprime par

$$df^i = T_{(M)}^{ji} dS_j \quad (3.76)$$

ce qui justifie le nom (tenseur des contraintes de Maxwell) donné à $T_{(M)}^{ij}$.

Exercice 3.1. Calculer \vec{df} lorsque $\partial\Omega$ est la surface d'un conducteur, \vec{E} est perpendiculaire à la surface et $\vec{B} = 0$.

3.2.7 Tenseur énergie-impulsion canonique

La formulation lagrangienne de la mécanique permet de faire le lien entre les lois de conservation (énergie, impulsion, moment cinétique) et les symétries du système (respectivement uniformité du temps, homogénéité et isotropie de l'espace). Ainsi, on peut établir la conservation de l'énergie du système décrit par un lagrangien $L(x, \dot{x})$ ne dépendant pas explicitement du temps de la façon suivante. On porte dans $L(x, \dot{x})$ une solution $x(t)$ des équations d'Euler-Lagrange (2.8) et on forme $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x}$. On remplace $\frac{\partial L}{\partial x}$ par $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ pour obtenir

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]. \quad (3.77)$$

On en déduit la conservation de l'énergie $\frac{dH}{dt} = 0$ où H est l'hamiltonien

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = p\dot{x} - L. \quad (3.78)$$

Procédons de façon analogue pour un système décrit par la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$ ne dépendant pas explicitement des coordonnées de l'espace-temps \mathcal{E} .

Soit donc une solution ϕ_k des équations d'Euler-Lagrange (2.50). On a

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \partial_\nu \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial_\nu \partial_\mu \phi_k. \quad (3.79)$$

On utilise (2.50) pour remplacer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}$ par $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)}$:

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right] \partial_\nu \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial_\mu [\partial_\nu \phi_k] \quad (3.80)$$

ou

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \phi_k \right]. \quad (3.81)$$

Pour le champ électromagnétique libre (cas $j^\mu = 0$), cette équation conduit à l'introduction du *tenseur énergie-impulsion canonique*

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{champ}}}{\partial (\partial_\mu A^\rho)} \partial^\nu A^\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{champ}}. \quad (3.82)$$

La densité lagrangienne $\mathcal{L}_{\text{champ}}$ étant un invariant scalaire, $T_{\text{can}}^{\mu\nu}$ est bien un tenseur et ce tenseur vérifie $\partial_\mu T_{\text{can}}^{\mu\nu} = 0$ d'après (3.81). La composante T_{can}^{00} est la densité hamiltonienne (comparer à (2.52))

$$\mathcal{H}_{\text{champ}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{champ}}}{\partial (\partial_0 A^\rho)} \partial^0 A^\rho - \mathcal{L}_{\text{champ}} \quad (3.83)$$

et donc associée à la densité d'énergie.

En utilisant $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{champ}}}{\partial (\partial_\mu A^\rho)} = -\frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\rho$ (cf. équation (2.57)) on a explicitement

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F^\mu{}_\rho (\partial^\nu A^\rho) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right]. \quad (3.84)$$

Ce tenseur est inacceptable pour représenter des grandeurs physiques. Il n'est pas symétrique et dépend du choix de jauge. Toutefois, à l'aide d'une transformation (3.17), à savoir en rajoutant

$$\frac{1}{\mu_0} \partial^\rho (A^\nu F^\mu{}_\rho) = \frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\rho (\partial^\rho A^\nu) \quad (3.85)$$

($\mathcal{L}_{\text{champ}}$ se rapporte au champ libre pour lequel $\partial^\rho F^\mu{}_\rho = 0$), on retrouve le tenseur énergie-impulsion $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ donné par l'équation (3.62).

3.3 Théorème de Noether

Considérons un système décrit par la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Une transformation

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon \delta \phi(x) \quad (3.86)$$

est appelée *transformation de symétrie* du système si elle change la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \delta \mathcal{L} \quad (3.87)$$

par l'addition d'une quadridivergence

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{I}^\mu. \quad (3.88)$$

L'action est transformée en

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x \rightarrow S' = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}' d^4x = S + \epsilon \delta S \quad (3.89)$$

avec

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \partial_\mu \mathcal{I}^\mu d^4x = 0 \quad (3.90)$$

d'après l'équation (1.104). Dans une transformation de symétrie, l'action est invariante et les équations du mouvement sont inchangées.

Remarque $\delta S = 0$ est vérifiée pour toutes les transformations infinitésimales d'une solution $\phi(x)$ des équations du mouvement. Mais par transformation de symétrie, il faut comprendre que les équations (3.86–3.90) s'appliquent à un champ $\phi(x)$ quelconque.

Nous supposons de plus que ϵ est un infiniment petit arbitraire : on considère en fait une infinité de transformations infinitésimales de symétrie qui forment un groupe continu à un paramètre (ϵ). Dans (3.86), la variation $\delta\phi(x)$ dépend de ϕ (cf. ci-dessous l'exemple des translations parallèles à l'axe α où $\delta\phi(x)$ est donné par l'équation (3.99)).

ϵ étant un infiniment petit arbitraire, calculons la variation $\epsilon \delta\mathcal{L}$ pour la variation $\epsilon \delta\phi(x)$ d'une solution des équations du mouvement sans supposer que la transformation soit une symétrie :

$$\epsilon \delta\mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \epsilon \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\partial_\mu\phi. \quad (3.91)$$

En utilisant les équations du mouvement $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}$ et en divisant par ϵ , il vient :

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu \delta\phi = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right). \quad (3.92)$$

Pour une transformation de symétrie on obtient en comparant avec (3.88)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - \mathcal{I}^\mu \right) = 0. \quad (3.93)$$

La densité de courant (**courant de Noether**²)

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - \mathcal{I}^\mu \quad (3.94)$$

2. Amalie Emmy Noether (1882-1935)

est localement conservée ($\partial_\mu j^\mu = 0$) pour un champ solution des équations du mouvement. On a ainsi montré le **théorème de Noether** (1918) : à chaque groupe continu à un paramètre de symétries infinitésimales (3.86) correspond le courant localement conservé (3.94). La **charge de Noether** associée

$$Q = k \int j^0 d^3x \quad (3.95)$$

est conservée (k étant une constante arbitraire). Le courant de Noether n'étant pas nécessairement un quadrivecteur (cf. équation (3.103) ci-après), il se peut que la charge (3.95) ne soit pas invariante.

Le théorème de Noether associe la conservation de l'énergie-impulsion d'un système isolé à son invariance par translations. Dans la translation $\epsilon \vec{e}_1$, une fonction f dépendant de x^1 et x^2 se transforme par

$$f(x^1, x^2) \rightarrow f'(x^1, x^2) = f(x^1 - \epsilon, x^2) = f(x^1, x^2) - \epsilon \partial_1 f(x^1, x^2) \quad (3.96)$$

Pour $\alpha = 0, 1, 2$ ou 3 nous prendrons

$$f(x) \rightarrow f'(x) = f(x) + \epsilon \partial^\alpha f(x) \quad (3.97)$$

Le champ $\phi(x)$ se transforme en

$$\phi'(x) = \phi(x) + \epsilon \partial^\alpha \phi(x) \quad (3.98)$$

soit en comparant avec (3.86)

$$\delta \phi(x) = \partial^\alpha \phi(x). \quad (3.99)$$

La densité lagrangienne se transforme en

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \partial^\alpha \mathcal{L}. \quad (3.100)$$

La variation de la densité lagrangienne

$$\delta \mathcal{L} = \partial^\alpha \mathcal{L} = \partial_\mu g^{\mu\alpha} \mathcal{L} \quad (3.101)$$

est la quadridivergence de

$$\mathcal{I}^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} \mathcal{L}. \quad (3.102)$$

Il y a un courant de Noether pour chaque α . Leur ensemble forme le tenseur énergie-impulsion canonique

$$T_c^{\mu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\alpha \phi - g^{\mu\alpha} \mathcal{L} \quad (3.103)$$

(cf. équation (3.82)) qui vérifie

$$\partial_\mu T_c^{\mu\alpha} = 0. \quad (3.104)$$

Les charges de Noether forment la quadriimpulsion

$$p^\alpha = \frac{1}{c} \int T_c^{0\alpha} d^3x. \quad (3.105)$$

4

Théorie quantique du rayonnement

L'électrodynamique quantique permet de décrire les interactions électromagnétiques des particules chargées. L'objectif de ce chapitre est de présenter une partie de cette théorie, la description quantique d'un système champ + particules à basses énergies, où on peut négliger la possibilité de création de paires particules-antiparticules. On abandonnera la covariance relativiste explicite en utilisant la **jaugé de Coulomb**. Cette description est bien adaptée à l'étude des processus d'interaction entre matière (atomes et molécules) et rayonnement.

4.1 Quantification d'un oscillateur harmonique

4.1.1 Quantification canonique

On rappelle la méthode de quantification d'un oscillateur harmonique d'équation

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (4.1)$$

L'oscillateur est décrit par le lagrangien (on pose la masse $m = 1$)

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2). \quad (4.2)$$

Le moment conjugué de x est $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$ et l'hamiltonien est

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 x^2). \quad (4.3)$$

Les équations de Hamilton sont

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.4)$$

La quantification canonique consiste à remplacer les variables conjuguées x et p par des opérateurs hermitiques¹ qui agissent sur un espace de Hilbert² (espace des états) et vérifient la relation de commutation

$$[x, p] = i\hbar. \quad (4.5)$$

On déduit de cette relation que $[p, f(x)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}$ et $[x, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p}$, c'est-à-dire qu'on peut faire les identifications

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.6)$$

L'hamiltonien H devient un opérateur qui détermine l'évolution du système. On peut adopter deux points de vue.

Dans le point de vue de Schrödinger³, les opérateurs x et p sont fixes et les vecteurs d'état $|\psi_S(t)\rangle$ évoluent suivant

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = H |\psi_S(t)\rangle. \quad (4.7)$$

Il existe un opérateur unitaire d'évolution $U(t, t_0)$ qui translate les vecteurs d'état de l'instant t_0 à l'instant t

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle. \quad (4.8)$$

L'opérateur d'évolution $U(t, t_0)$ vérifie

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \quad \text{et} \quad U(t_0, t_0) = 1. \quad (4.9)$$

Il satisfait à la loi de composition multiplicative

$$U(t, t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0). \quad (4.10)$$

Supposant H indépendant du temps, on pourra écrire

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}. \quad (4.11)$$

Dans le point de vue de Heisenberg⁴, les vecteurs d'état $|\psi_H\rangle$ sont fixes

$$|\psi_H\rangle = U^{-1}(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle \quad (4.12)$$

et les opérateurs $A_H(t) = U^{-1}(t, t_0) A_S U(t, t_0)$ évoluent au cours du temps selon

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H] \quad (4.13)$$

1. Charles Hermite (1822-1901)

2. David Hilbert (1862-1943)

3. Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961)

4. Werner Karl Heisenberg (1901-1976)

pour un opérateur A_S indépendant du temps dans le point de vue de Schrödinger (H étant indépendant du temps $H_H = H$). L'observable physique associée aux opérateurs A_S et A_H s'obtient par

$$\underbrace{\langle \psi_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle}_{\text{représ. Schrödinger}} = \underbrace{\langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle}_{\text{représ. Heisenberg}} \quad (4.14)$$

Le point de vue de Heisenberg conduit à une analogie formelle entre Mécanique Classique et Mécanique Quantique: l'équation (4.13) donne pour $x_H(t)$ et $p_H(t)$, en utilisant l'équation (4.6),

$$\frac{dx_H}{dt} = \frac{[x_H, H]}{i\hbar} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_H \quad \text{et} \quad \frac{dp_H}{dt} = \frac{[p_H, H]}{i\hbar} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_H \quad (4.15)$$

qui ont la même forme que les équations de Hamilton (4.4).

4.1.2 Rappel sur l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique quantique est décrit plus commodément en introduisant les opérateurs création a^\dagger et destruction a ,

$$a = \frac{\omega x + ip}{\sqrt{2\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \frac{\omega x - ip}{\sqrt{2\hbar\omega}}, \quad (4.16)$$

conjugués hermitiques l'un de l'autre. Ces opérateurs vérifient la relation de commutation

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (4.17)$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad (4.18)$$

et l'hamiltonien s'écrit

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (4.19)$$

Les vecteurs propres de H sont $|n\rangle$, de valeurs propres $\hbar\omega (n + \frac{1}{2})$, où $n = 0, 1, 2, \dots$. On a les relations

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ a |0\rangle &= 0 \\ |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En représentation de Heisenberg, les opérateurs création-destruction ont la forme

$$a_H^\dagger(t) = a^\dagger e^{i\omega(t-t_0)}, \quad a_H(t) = a e^{-i\omega(t-t_0)}. \quad (4.21)$$

4.1.3 Interprétation en termes de particules

Deux niveaux d'énergie consécutifs diffèrent d'un quantum d'énergie $\hbar\omega$. On interprète l'état $|n\rangle$ comme décrivant un système de n particules (phonon, photon, etc.) ayant toutes les mêmes caractéristiques (énergie $\hbar\omega$, quantité de mouvement $\hbar\vec{k}$, polarisation $\vec{\varepsilon}$ pour des photons). L'opérateur $\mathcal{N} = a^\dagger a$ est le nombre de particules. L'opérateur a^\dagger crée une particule et l'opérateur a détruit une particule. Le vecteur d'état $|0\rangle$ représente le vide ; il lui est associé une énergie $\hbar\omega/2$. Ces particules sont des bosons⁵ : elles sont toutes dans le même état quantique et leur nombre n est arbitraire.

4.1.4 Ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants

Considérons maintenant un ensemble de p oscillateurs harmoniques indépendants. L'espace des états $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_p$ est le produit tensoriel des espaces \mathcal{E}_i des divers oscillateurs. L'hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_{i=1}^p \hbar\omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \quad (4.22)$$

et les opérateurs de l'oscillateur k commutent avec ceux de l'oscillateur $l \neq k$:

$$\left[a_k, a_l^\dagger \right] = \delta_{kl}, \quad \text{et} \quad \left[a_k, a_l \right] = \left[a_k^\dagger, a_l^\dagger \right] = 0. \quad (4.23)$$

Les vecteurs propres de H (on pose $|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$),

$$\begin{aligned} |m_1, m_2, \dots, m_p\rangle &= |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \otimes \dots \otimes |m_p\rangle \\ &= \frac{(a_1^\dagger)^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{(a_2^\dagger)^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \dots \frac{(a_p^\dagger)^{m_p}}{\sqrt{m_p!}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.24)$$

d'énergie $\sum_{i=1}^p \hbar\omega_i (m_i + 1/2)$, forment une base de l'espace \mathcal{E} .

4.1.5 Transformation unitaire d'opérateurs création-destruction

Envisageons le cas où toutes les fréquences ω_i ($i = 1, \dots, p$ avec $p > 1$) sont les mêmes (*oscillateur isotrope à p dimensions*). Les niveaux d'énergie ne dépendent que de $m = \sum_{i=1}^p m_i$ et sont dégénérés pour $m > 0$. Considérons la transformation d'opérateurs création-destruction

$$a'_i = U_{ij} a_j, \quad a'^{\dagger}_i = U_{ij}^* a^{\dagger}_j \quad (\text{sommations sur } j) \quad (4.25)$$

où U_{ij} est une matrice unitaire $p \times p$.

5. Satyendranath Bose (1894-1974)

Montrons quelques propriétés de cette transformation.

– Elle préserve la forme (4.23) des relations de commutation :

$$\left[a'_i, a'_j \right] = U_{ik} U_{jl}^* \left[a_k, a_l \right] = U_{ik} U_{jk}^* = \delta_{ij}, \quad (4.26)$$

$$\left[a'_i, a'_j \right] = U_{ik} U_{jl} \left[a_k, a_l \right] = 0. \quad (4.27)$$

– Elle préserve la forme de l'opérateur $\mathcal{N} = a_j^\dagger a_j$ (somme sur j) :

$$a_j^\dagger a'_j = U_{jk}^* U_{jl} a_k^\dagger a_l = \delta_{kl} a_k^\dagger a_l = a_k^\dagger a_k. \quad (4.28)$$

– Les vecteurs propres de

$$H = \hbar\omega \sum_{i=1}^p \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \sum_{i=1}^p \left(a_i'^\dagger a_i' + \frac{1}{2} \right),$$

$$|m'_1, m'_2, \dots, m'_p\rangle = \frac{(a_1'^\dagger)^{m'_1}}{\sqrt{m'_1!}} \frac{(a_2'^\dagger)^{m'_2}}{\sqrt{m'_2!}} \dots \frac{(a_p'^\dagger)^{m'_p}}{\sqrt{m'_p!}} |0\rangle, \quad (4.29)$$

d'énergie $\hbar\omega \sum_{i=1}^p (m'_i + 1/2)$ forment une autre base de l'espace \mathcal{E} .

4.2 Lagrangien

Considérons un système formé de N particules chargées $a = 1, \dots, N$, de coordonnées $\vec{x}_a(t)$. On note

$$\rho_a(\vec{r}, t) = q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{x}_a(t)) \quad (4.30)$$

la densité de charge de la particule a . Le quadricourant est

$$j^\mu(\vec{r}, t) = (\rho c, \vec{J}) = \sum_{a=1}^N \rho_a(\vec{r}, t) (c, \dot{\vec{x}}_a(t)). \quad (4.31)$$

On considérera des particules non relativistes dont on néglige le spin. Le lagrangien du système champ électromagnétique + particules est

$$\begin{aligned} L &= \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} (\dot{\vec{x}}_a)^2 + \int \mathcal{L} d^3x \\ \mathcal{L} &= -\rho\phi + \vec{J} \cdot \vec{A} + \frac{1}{2\mu_0 c^2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.3 Problèmes dans la quantification du champ électromagnétique

Posons

$$X^\mu{}_\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} = -\frac{1}{c\mu_0} F^\mu{}_\nu \quad [\text{en utilisant (2.57)}]. \quad (4.33)$$

Le champ moment conjugué Π_{A^μ} du champ A^μ est la composante $X^0{}_\mu$ de ce tenseur :

$$\Pi_{A^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^i)} = -\frac{1}{c\mu_0} F^{0i} = -\frac{1}{c^2\mu_0} E^i, \quad \Pi_{A^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^0)} = 0. \quad (4.34)$$

Les champs Π_{A^i} vérifient $\sum_i \partial_i \Pi_{A^i} = -\frac{1}{c^2\mu_0} \partial_i E^i = -\rho$ qui ne dépend que de la position \vec{x}_a des particules.

La méthode de quantification remplace deux variables conjuguées par des opérateurs ayant un commutateur non nul. Deux difficultés apparaissent pour quantifier ce système :

- On ne peut pas former un commutateur non nul avec le couple $A^0, \Pi_{A^0} = 0$.
- L'existence d'une relation fonctionnelle entre les variables canoniques \vec{x}_a et $\Pi_{A^i}(\vec{r}, t)$ (les dérivées $\partial_i \Pi_{A^j}$ par rapport à x^i sont des combinaisons de variables infiniment proches) est incompatible avec les formes usuelles des commutateurs. On peut le comprendre avec un exemple dans le cas des variables canoniques discrètes x_i, p_i . Si les variables sont liées par $\alpha x_1 = p_2 - p_3$ (α constante), on ne peut pas imposer $[x_1, p_1] = i\hbar$ car $\alpha [x_1, p_1] = [p_2, p_1] - [p_3, p_1] \neq 0$ est incompatible avec $[p_i, p_j] = 0$.

Ces difficultés peuvent être attribuées à la redondance des potentiels.

4.3.1 Méthode de quantification utilisée

La première difficulté sera réglée en éliminant la variable redondante $A^0 = \phi/c$. Cette élimination est rendue plus simple en utilisant la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. La covariance des équations n'est alors plus manifeste.

De façon générale, lorsqu'une vitesse \dot{x}_0 (comme ici $\dot{A}^0(\vec{r}, t)$ en tout point \vec{r}) n'intervient pas dans un lagrangien $L(x_0, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$, l'équation d'Euler-Lagrange relative à x_0

$$\frac{\partial L}{\partial x_0}(x_0, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) = 0 \quad (4.35)$$

permet de considérer x_0 comme une fonction implicite

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$$

des autres variables et vitesses. Le système peut alors être décrit par les $2N$ variables et vitesses $x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N$ et le lagrangien

$$L' = L(f(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N), x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N).$$

Si le principe de moindre action est satisfait quand le système est décrit par L avec la variable x_0 , il reste a fortiori satisfait quand le système est décrit par L' .

On s'impose la jauge de Coulomb : les variables A^i sont liées par $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. La seconde difficulté sera réglée en remplaçant les variables liées A^i par des variables indépendantes (variables normales).

4.3.2 Autre méthode

On peut quantifier le système des particules et du champ électromagnétique en gardant la covariance des équations. On rajoute au lagrangien une densité de la forme

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{\alpha\mu_0} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.36)$$

qui contient la dérivée \dot{A}^0 . Le nouveau système peut alors être quantifié de façon canonique. Lorsqu'on impose ensuite la condition de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, $\mathcal{L}_{\text{jauge}} = 0$ et on retrouve le système initial.

4.4 Élimination de ϕ et utilisation de la jauge de Coulomb

Écrivons

$$\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp \quad \text{où} \quad \vec{E}_\parallel = -\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.37)$$

C'est la décomposition de \vec{E} en un *champ longitudinal* \vec{E}_\parallel (qui vérifie $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\parallel = 0$) et en un *champ transverse* (ou *solénoïdal*) \vec{E}_\perp (qui vérifie $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp = 0$ puisqu'on suppose $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$). En jauge de Coulomb, ϕ vérifie l'équation de Poisson (1.23) ; c'est donc le potentiel coulombien de la répartition instantanée de charge

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{x}_a(t)|}. \quad (4.38)$$

Transformons la contribution de \vec{E}^2 au lagrangien (4.32)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int \vec{E}^2 d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int \vec{E}_\perp^2 d^3x + \frac{1}{\mu_0 c^2} \int \vec{E}_\perp \cdot \vec{E}_\parallel d^3x + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int \vec{E}_\parallel^2 d^3x. \end{aligned} \quad (4.39)$$

La deuxième intégrale du membre de droite est nulle :

$$\int (\partial_i \phi)(\partial_0 A^i) d^3 x = - \int \phi \partial_0 \partial_i A^i d^3 x = 0. \quad (4.40)$$

La troisième s'écrit :

$$-\frac{\epsilon_0}{2} \int E_{\parallel}^i \partial_i \phi d^3 x = \frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \partial_i E_{\parallel}^i d^3 x = \frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \partial_i E^i d^3 x = \frac{1}{2} \int \phi \rho d^3 x. \quad (4.41)$$

En y ajoutant la contribution $-\int \phi \rho d^3 x$ du terme d'interaction du lagrangien, nous écrivons

$$-\frac{1}{2} \int \phi \rho d^3 x = - \sum_{a,b} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3 x d^3 x' \frac{\rho_a(\vec{r}, t) \rho_b(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \sum_a W_{\text{Coul}}^a - U_{\text{Coul}} \quad (4.42)$$

où

$$W_{\text{Coul}}^a = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3 x d^3 x' \frac{\rho_a(\vec{r}, t) \rho_a(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.43)$$

est l'énergie coulombienne propre de la particule a (qui est infinie pour une répartition de charge ponctuelle) et

$$\begin{aligned} U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= \sum_{a < b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x d^3 x' \frac{\rho_a(\vec{r}, t) \rho_b(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \sum_{a < b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \end{aligned} \quad (4.44)$$

est l'énergie coulombienne d'interaction entre les particules. Le lagrangien s'écrit maintenant, en négligeant l'énergie propre des particules,

$$\begin{aligned} L &= \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - U_{\text{Coul}} + \underbrace{\sum_{a=1}^N q_a \dot{\vec{x}}_a \cdot \vec{A}(\vec{x}_a, t)}_{\int \vec{J} \cdot \vec{A} d^3 x} \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int \left[\left(\dot{\vec{A}} \right)^2 - c^2 \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right)^2 \right] d^3 x. \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.5 Conditions aux limites périodiques

Nous allons supposer que le système se trouve dans une boîte cubique \mathcal{B} de côté ℓ ($|x^i| \leq \frac{\ell}{2}$) et que les champs et leurs dérivées vérifient des conditions aux limites périodiques

$$f(x^1, x^2, x^3, t) = f(x^1 + \ell, x^2, x^3, t) = f(x^1, x^2 + \ell, x^3, t) = f(x^1, x^2, x^3 + \ell, t). \quad (4.46)$$

On peut développer les champs en séries de Fourier

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{n \in D} f_n(t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \quad g(\vec{r}, t) = \sum_{n \in D} g_n(t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (4.47)$$

où D est l'ensemble des vecteurs $n = \vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ (la flèche sur n sera omise dans la suite) avec $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ et $\vec{k}_n = \frac{2\pi\vec{n}}{\ell}$. Voici quelques relations utiles (les intégrales sont prises sur la boîte \mathcal{B}).

– Orthogonalité :

$$\int e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} d^3x = \ell^3 \delta_{mn} = \ell^3 \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y} \delta_{m_z n_z}. \quad (4.48)$$

– Transformation inverse de (4.47) :

$$f_n = \frac{1}{\ell^3} \int f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} d^3x. \quad (4.49)$$

– Fonction $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ (\vec{r}, \vec{r}' dans \mathcal{B}) : en portant $f(\vec{r}, t) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ dans l'équation (4.49) on trouve $f_n = \frac{1}{\ell^3} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}'}$ et (4.47) donne alors

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = \sum_n \frac{1}{\ell^3} e^{i\vec{k}_n \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}. \quad (4.50)$$

– Identité de Parseval⁶ :

$$\int |f(\vec{r}, t)|^2 d^3x = \sum_{mn} \int f_m^* f_n e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} d^3x = \sum_n \ell^3 |f_n|^2. \quad (4.51)$$

– Identité de Plancherel⁷ :

$$\int f^*(\vec{r}, t) g(\vec{r}, t) d^3x = \sum_n \ell^3 f_n^* g_n. \quad (4.52)$$

– Fonction réelle :

$$f(\vec{r}, t) \text{ réel équivaut à } f_n^* = f_{-n} \quad \forall n \in D. \quad (4.53)$$

– On retrouve l'espace entier en prenant la limite $\ell \rightarrow \infty$. Les sommes sur n deviennent des intégrales sur \vec{k} .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^3 f_n(t) &\longrightarrow \hat{f}(\vec{k}, t), & \sum_n \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^3 &\longrightarrow \int d^3k, \\ \delta_{nn'} &\longrightarrow \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (4.54)$$

6. Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836)

7. Michel Plancherel (1885-1967)

4.6 Potentiel vecteur : composantes $A_{n\alpha}$

Le potentiel vecteur

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{n \in D} \vec{A}_n(t) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (4.55)$$

vérifie la condition de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{n \in D} i\vec{k}_n \cdot \vec{A}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} = 0. \quad (4.56)$$

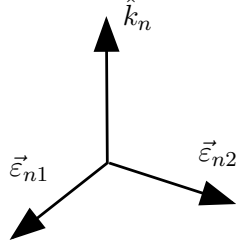


FIG. 4.1 – Base transverse.

La composante \vec{A}_n est donc perpendiculaire à \vec{k}_n . On a aussi la relation (4.53) $\vec{A}_n^* = \vec{A}_{-n}$. Pour éviter des singularités, nous supposons de plus que $\vec{A}_n = 0$ pour $n = (0, 0, 0)$ (cette restriction disparaît dans la limite $\ell \rightarrow \infty$ lorsque les \vec{k}_n peuvent devenir infiniment petits). Soit D' une moitié de $D^* = D - \{(0, 0, 0)\}$, c'est-à-dire un sous-ensemble de D^* tel que pour tout $n \in D^*$ alors exactement une seule des valeurs n ou $-n$ se trouve dans D' . Pour tout $n \in D'$, introduisons (cf. figure 4.1) une base transverse formée de deux vecteurs complexes $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$; la direction transverse de $\vec{\varepsilon}_{n1}$ est arbitraire et indépendante des autres $\vec{\varepsilon}_{n'\alpha}$ ($n' \in D', n' \neq n$); les composantes sur $Ox^1x^2x^3$ du vecteur $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ sont notées $\varepsilon_{n\alpha}^i$):

$$\hat{k}_n = \frac{\vec{k}_n}{k_n}, \quad \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{n\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \cdot \hat{k}_n = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (4.57)$$

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{n\alpha}^{i*} \varepsilon_{n\alpha}^j = \delta^{ij} - \frac{k_n^i k_n^j}{(\vec{k}_n)^2}. \quad (4.58)$$

Écrivant $\vec{A}_n = \sum_{\alpha} A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ et $\vec{A}_{-n} = \vec{A}_n^* = \sum_{\alpha} A_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^*$ pour $n \in D'$, il vient

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum'_{n\alpha} \left(A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + A_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right) \quad (4.59)$$

où la somme porte sur $\alpha = 1, 2$ et $n \in D'$ (ce qui est indiqué par \sum'). Les variables complexes $A_{n\alpha}(t)$ ($n \in D', \alpha = 1, 2$) sont indépendantes les unes des autres. Définissons (provisoirement) les vecteurs transverses de \vec{k}_{-n} ($n \in D'$) par $\vec{\varepsilon}_{-n\alpha} = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^*$ et posons $A_{-n\alpha} = A_{n\alpha}^*$. L'équation (4.59) devient

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{n\alpha} A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (4.60)$$

et le champ électrique transverse s'écrit

$$\vec{E}_{\perp} = -\dot{\vec{A}} = -\sum_{n\alpha} \left(\dot{A}_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + \dot{A}_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right) = -\sum_{n\alpha} \dot{A}_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (4.61)$$

Portons ces expressions dans les intégrales

$$\int (\dot{\vec{A}})^2 d^3x = \ell^3 \sum_n \left| \sum_{\alpha} \dot{A}_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \right|^2 = \ell^3 \sum_{n\alpha} |\dot{A}_{n\alpha}|^2 = 2\ell^3 \sum'_{n\alpha} |\dot{A}_{n\alpha}|^2 \quad (4.62)$$

et

$$\begin{aligned} c^2 \int (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 d^3x &= \ell^3 c^2 \sum_n \left| \sum_{\alpha} A_{n\alpha} i\vec{k}_n \wedge \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \right|^2 \\ &= \ell^3 c^2 \sum_{n\alpha} k_n^2 |A_{n\alpha}|^2 = 2\ell^3 \sum'_{n\alpha} \omega_n^2 |A_{n\alpha}|^2 \end{aligned} \quad (4.63)$$

où $\omega_n = k_n c$. Le lagrangien (4.45) s'écrit maintenant en fonction des variables discrètes indépendantes réelles \vec{x}_a , $\dot{\vec{x}}_a$ ($a = 1, \dots, N$) et complexes $A_{n\alpha}$, $\dot{A}_{n\alpha}$ ($n \in D'$, $\alpha = 1$ ou 2)

$$\begin{aligned} L &= \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + \sum_a q_a \dot{\vec{x}}_a \cdot \vec{A}(\vec{x}_a, t) + L_{\text{champ}} \\ \vec{A}(\vec{x}_a, t) &= \sum'_{n\alpha} \left(A_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}_a} + A_{n\alpha}^* \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}_a} \right) \quad (4.64) \\ L_{\text{champ}} &= \frac{\ell^3}{\mu_0 c^2} \sum'_{n\alpha} \left(|\dot{A}_{n\alpha}|^2 - \omega_n^2 |A_{n\alpha}|^2 \right). \end{aligned}$$

Remplaçons les variables complexes $A_{n\alpha}$ par les variables réelles $X_{n\alpha 1}$ et $X_{n\alpha 2}$

$$A_{n\alpha} = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2}{2\ell^3}} (X_{n\alpha 1} + iX_{n\alpha 2}). \quad (4.65)$$

On a (somme sur $s = 1, 2$)

$$L_{\text{champ}} = \sum'_{n\alpha s} \frac{1}{2} \left(\dot{X}_{n\alpha s}^2 - \omega_n^2 X_{n\alpha s}^2 \right). \quad (4.66)$$

Écrit avec les variables $X_{n\alpha s}$, le champ libre apparaît comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants qui évoluent suivant

$$\ddot{X}_{n\alpha s} + \omega_n^2 X_{n\alpha s} = 0. \quad (4.67)$$

Le potentiel vecteur \vec{A} et le champ électrique transverse $\vec{E}_{\perp} = -\dot{\vec{A}}$ s'écrivent, d'après les équations (4.59), (4.61) et (4.65),

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum'_{n\alpha s} X_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s}(\vec{r}), \quad \vec{E}_{\perp}(\vec{r}, t) = - \sum'_{n\alpha s} \dot{X}_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s}(\vec{r}) \quad (4.68)$$

où les fonctions $\vec{f}_{n\alpha s}(\vec{r})$ forment une base réelle des champs de vecteurs transverses. Elles sont normalisées par

$$\int \vec{f}_{n\alpha s}(\vec{r}) \cdot \vec{f}_{n'\alpha' s'}(\vec{r}) d^3x = \mu_0 c^2 \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'} \quad (4.69)$$

et données explicitement par

$$\begin{aligned} \vec{f}_{n\alpha 1}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\mu_0 c^2}{2\ell^3}} \left(\vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + \vec{\varepsilon}_{-n\alpha} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right), \\ \vec{f}_{n\alpha 2}(\vec{r}) &= i \sqrt{\frac{\mu_0 c^2}{2\ell^3}} \left(\vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - \vec{\varepsilon}_{-n\alpha} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Si $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ est réel ($\vec{\varepsilon}_{-n\alpha} = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* = \vec{\varepsilon}_{n\alpha}$) elles se simplifient en

$$\vec{f}_{n\alpha 1}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2\mu_0 c^2}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \cos \vec{k}_n \cdot \vec{r}, \quad \vec{f}_{n\alpha 2}(\vec{r}) = -\sqrt{\frac{2\mu_0 c^2}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} \sin \vec{k}_n \cdot \vec{r}. \quad (4.71)$$

4.7 Hamiltonien

Le moment canonique conjugué de $X_{n\alpha s}$ est

$$\Pi_{n\alpha s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_{n\alpha s}} = \dot{X}_{n\alpha s} \quad (4.72)$$

et celui de x_a^i est

$$\vec{p}_a^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i} = m_a \dot{x}_a^i + q_a A^i(\vec{x}_a, t) \quad (\text{on pose } \vec{p}_a = (p_a^1, p_a^2, p_a^3)). \quad (4.73)$$

L'hamiltonien est

$$\begin{aligned} H &= \sum_a \vec{p}_a \cdot \dot{\vec{x}}_a + \sum'_{n\alpha s} \Pi_{n\alpha s} \dot{X}_{n\alpha s} - L \\ &= \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 + U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + \sum'_{n\alpha s} \frac{1}{2} \left(\dot{X}_{n\alpha s}^2 + \omega_n^2 X_{n\alpha s}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

soit, dans les variables $X_{n\alpha s}$, \vec{x}_a , $\Pi_{n\alpha s}$ et \vec{p}_a

$$H = \sum_a \frac{1}{2m_a} \left(\vec{p}_a - q_a \vec{A}(\vec{x}_a, t) \right)^2 + U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) + H_{\text{champ}} \quad (4.75)$$

avec

$$H_{\text{champ}} = \sum'_{n\alpha s} \frac{1}{2} \left(\Pi_{n\alpha s}^2 + \omega_n^2 X_{n\alpha s}^2 \right). \quad (4.76)$$

4.8 Quantification canonique

Nous adoptons le point de vue de Schrödinger. Les variables conjuguées (réelles) sont transformées en opérateurs hermitiques indépendants du temps qui commutent entre-eux sauf

$$[x_a^i, p_a^i] = [X_{n\alpha s}, \Pi_{n\alpha s}] = i\hbar \quad (\text{non sommé sur les indices répétés}). \quad (4.77)$$

Il est plus commode d'utiliser les opérateurs création et destruction associés à chaque oscillateur harmonique :

$$a_{n\alpha s} = \frac{\omega_n X_{n\alpha s} + i\Pi_{n\alpha s}}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} \quad \text{et} \quad a_{n\alpha s}^\dagger = \frac{\omega_n X_{n\alpha s} - i\Pi_{n\alpha s}}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} \quad (4.78)$$

conjugués hermitiques l'un de l'autre. Ces opérateurs vérifient les relations de commutation

$$[a_{n\alpha s}, a_{n'\alpha' s'}^\dagger] = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'}, \quad [a_{n\alpha s}, a_{n'\alpha' s'}] = [a_{n\alpha s}^\dagger, a_{n'\alpha' s'}^\dagger] = 0. \quad (4.79)$$

Inversement

$$X_{n\alpha s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} (a_{n\alpha s}^\dagger + a_{n\alpha s}), \quad \Pi_{n\alpha s} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} (a_{n\alpha s}^\dagger - a_{n\alpha s}) \quad (4.80)$$

et l'hamiltonien du champ libre s'écrit

$$H_{\text{champ}} = \sum'_{n\alpha s} \hbar\omega_n \left(a_{n\alpha s}^\dagger a_{n\alpha s} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.81)$$

Le potentiel vecteur (4.68) devient l'opérateur (indépendant du temps)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum'_{n\alpha s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} (a_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s} + a_{n\alpha s}^\dagger \vec{f}_{n\alpha s}). \quad (4.82)$$

La variable $\dot{X}_{n\alpha s}$ est remplacée par l'opérateur $\Pi_{n\alpha s}$ et le champ électrique transverse devient l'opérateur

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum'_{n\alpha s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} (i a_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s} - i a_{n\alpha s}^\dagger \vec{f}_{n\alpha s}). \quad (4.83)$$

4.9 Modes normaux

Pour faciliter l'interprétation physique nous allons effectuer un changement de la base (4.70) en revenant à des fonctions exponentielles, comme

dans (4.60). Ainsi, posant pour $n \in D'$

$$\begin{aligned}\vec{f}_{n\alpha}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{f}_{n\alpha 1} - i\vec{f}_{n\alpha 2}) = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \\ \vec{f}_{-n\alpha}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{f}_{n\alpha 1} + i\vec{f}_{n\alpha 2}) = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2}{\ell^3}} \vec{\varepsilon}_{-n\alpha} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}},\end{aligned}\quad (4.84)$$

le changement de base s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha} & \vec{f}_{-n\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} U^\dagger \quad (4.85)$$

où U est la matrice unitaire

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Posons pour $n \in D'$

$$a_{n\alpha} = \frac{a_{n\alpha 1} + ia_{n\alpha 2}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad a_{-n\alpha} = \frac{a_{n\alpha 1} - ia_{n\alpha 2}}{\sqrt{2}}. \quad (4.87)$$

C'est la transformation (4.25) d'opérateurs création-destruction étudiée section 4.1.5 correspondant à la matrice unitaire U (4.86). Les opérateurs destruction (4.87) $a_{n\alpha}$ ($n \in D^*$) et leurs conjugués hermitique $a_{n\alpha}^\dagger$ vérifient donc les relations de commutation

$$\left[a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'}^\dagger \right] = \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad \left[a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'} \right] = \left[a_{n\alpha}^\dagger, a_{n'\alpha'}^\dagger \right] = 0. \quad (4.88)$$

D'après (4.28), $\sum_s a_{n\alpha s}^\dagger a_{n\alpha s} = a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + a_{-n\alpha}^\dagger a_{-n\alpha}$ et l'hamiltonien du champ libre (4.81) s'écrit

$$H_{\text{champ}} = \sum_{n\alpha} \hbar \omega_n \left(a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.89)$$

On a

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha} & \vec{f}_{-n\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n\alpha} \\ a_{-n\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_{n\alpha 1} & \vec{f}_{n\alpha 2} \end{pmatrix} \underbrace{U^\dagger U}_{=1} \begin{pmatrix} a_{n\alpha 1} \\ a_{n\alpha 2} \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

soit

$$\begin{aligned}\sum_s a_{n\alpha s} \vec{f}_{n\alpha s} &= a_{n\alpha} \vec{f}_{n\alpha} + a_{-n\alpha} \vec{f}_{-n\alpha}, \\ \sum_s a_{n\alpha s}^\dagger \vec{f}_{n\alpha s} &= a_{n\alpha}^\dagger \vec{f}_{n\alpha}^* + a_{-n\alpha}^\dagger \vec{f}_{-n\alpha}^*.\end{aligned}\quad (4.91)$$

Les expressions (4.82) et (4.83) deviennent

$$\vec{A} = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_n}} \left(a_{n\alpha} \vec{f}_{n\alpha} + a_{n\alpha}^\dagger \vec{f}_{n\alpha}^* \right), \quad (4.92)$$

$$\vec{E}_\perp = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2}} \left(ia_{n\alpha} \vec{f}_{n\alpha} - ia_{n\alpha}^\dagger \vec{f}_{n\alpha}^* \right), \quad (4.93)$$

soit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_n}} \left[a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + a_{n\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right] \quad (4.94)$$

et

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = i \sum_{n\alpha} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar \omega_n}{2\ell^3}} \left[a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - a_{n\alpha}^\dagger \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right]. \quad (4.95)$$

Il est possible de changer la base transverse correspondant à un n donné par une nouvelle transformation unitaire V de la base et des opérateurs (somme sur les indices répétés)

$$\vec{\varepsilon}'_{n\alpha} = V_{\alpha\beta}^* \vec{\varepsilon}_{n\beta}, \quad a'_{n\alpha} = V_{\alpha\beta} a_{n\beta}. \quad (4.96)$$

On a alors

$$\vec{a}'_n = a'_{n\alpha} \vec{\varepsilon}'_{n\alpha} = a_{n\alpha} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}. \quad (4.97)$$

La forme des équations (4.94) et (4.95), des relations de commutation (4.88) et de l'hamiltonien du champ libre (4.89) reste inchangée. On peut donc lever la condition $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* = \vec{\varepsilon}_{-n\alpha}$ qui permettait de simplifier les calculs. Les expressions (4.94) et (4.95) sont des *développements en modes normaux*. Par transformation unitaire de la base, en se limitant à combiner entre-elles des fonctions de base correspondant au même ω_n (pour garder la forme (4.89) de l'hamiltonien), on obtiendra d'autres développements en modes normaux. Exemple : les développements (4.82) et (4.83).

4.10 Opérateurs du point de vue de Heisenberg (champ libre)

En représentation de Heisenberg, pour le champ libre, les opérateurs création-destruction ont la forme (équation (4.21) où on prend $t_0 = 0$) $a_{n\alpha}^\dagger(t) = a_{n\alpha}^\dagger e^{i\omega_n t}$ et $a_{n\alpha}(t) = a_{n\alpha} e^{-i\omega_n t}$. L'opérateur du champ $\vec{A}_H(\vec{r}, t)$ dans la représentation de Heisenberg s'écrit

$$\vec{A}_H(\vec{r}, t) = \sqrt{\mathcal{N}} \sum_{n\alpha} \left[a_{n\alpha} \vec{\phi}_{n\alpha}^-(\vec{r}, t) + a_{n\alpha}^\dagger \vec{\phi}_{n\alpha}^+(\vec{r}, t) \right] \quad (4.98)$$

où $\mathcal{N} = \hbar\mu_0 c$ et

$$\vec{\phi}_{n\alpha}^-(\vec{r}, t) = [\vec{\phi}_{n\alpha}^+(\vec{r}, t)]^* = \sqrt{\frac{c}{2\ell^3 \omega_n}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r} - i\omega_n t}. \quad (4.99)$$

Les fonctions $\vec{\phi}_{n\alpha}^\pm$ forment une base d'ondes planes du champ classique et sont normalisées par

$$\langle \vec{\phi}_{n\alpha}^\pm, \vec{\phi}_{m\beta}^\pm \rangle = \mp \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle \vec{\phi}_{n\alpha}^\pm, \vec{\phi}_{m\beta}^\mp \rangle = 0 \quad (4.100)$$

pour le produit scalaire

$$\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle = i \int_B d^3x \left(\vec{f}_1^* \cdot \frac{\partial \vec{f}_2}{c \partial t} - \left(\frac{\partial \vec{f}_1^*}{c \partial t} \right) \cdot \vec{f}_2 \right). \quad (4.101)$$

L'opérateur $\vec{E}_{\perp H}(\vec{r}, t)$ s'obtient (champ libre) par

$$\vec{E}_{\perp H}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}_H}{\partial t} = i\sqrt{\mathcal{N}} \sum_{n\alpha} \omega_n \left[a_{n\alpha} \vec{\phi}_{n\alpha}^-(\vec{r}, t) - a_{n\alpha}^\dagger \vec{\phi}_{n\alpha}^+(\vec{r}, t) \right]. \quad (4.102)$$

Noter que l'introduction du facteur $\sqrt{\mathcal{N}}$ dans (4.98) correspond à la forme de « l'énergie cinétique » du champ dans lagrangien (4.45)

$$T = \frac{1}{2\mu_0 c^2} \int (\dot{\vec{A}})^2 d^3x = \frac{\hbar c}{2} \frac{1}{\mathcal{N}} \int \left(\frac{\partial \vec{A}}{c \partial t} \right)^2 d^3x. \quad (4.103)$$

4.11 Récapitulatif des opérateurs

Nous avons défini les opérateurs \vec{x}_a ($a = 1, \dots, N$, de composantes x_a^i), \vec{p}_a (de composantes p_a^i), $\vec{a}_n = \sum_{\alpha} a_{n\alpha} \vec{\epsilon}_{n\alpha}$ ($n \in D^*$) et son conjugué hermitique $\vec{a}_n^\dagger = \sum_{\alpha} a_{n\alpha}^\dagger \vec{\epsilon}_{n\alpha}^*$ qui vérifient les relations de commutation

$$\begin{aligned} [a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'}^\dagger] &= \delta_{nn'} \delta_{\alpha\alpha'}, & [a_{n\alpha}, a_{n'\alpha'}] &= [a_{n\alpha}^\dagger, a_{n'\alpha'}^\dagger] = 0, \\ [x_a^i, p_b^j] &= i\hbar \delta_{ab} \delta_{ij}, & [x_a^i, x_b^j] &= [p_a^i, p_b^j] = 0, \\ [x_a^i, a_{n\alpha}] &= [x_a^i, a_{n\alpha}^\dagger] = [p_a^i, a_{n\alpha}] = [p_a^i, a_{n\alpha}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (4.104)$$

L'hamiltonien du système champ + particules peut se décomposer en trois parties

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{part}} + H_{\text{int}} + H_{\text{champ}} \\ H_{\text{part}} &= \sum_a \frac{1}{2m_a} \vec{p}_a^2 + U_{\text{Coul}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \\ H_{\text{int}} &= \sum_a \left[-\frac{q_a}{m_a} \vec{A}(\vec{x}_a) \cdot \vec{p}_a + \frac{q_a^2}{2m_a} \vec{A}^2(\vec{x}_a) \right] \\ H_{\text{champ}} &= \sum_{n\alpha} \hbar \omega_n \left(a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.105)$$

On a utilisé $\vec{p}_a \cdot \vec{A}(\vec{x}_a) = \vec{A}(\vec{x}_a) \cdot \vec{p}_a$ en jauge de Coulomb. La partie H_{part} ne dépend que des opérateurs des particules \vec{x}_a et \vec{p}_a . La partie H_{champ} ne dépend que des opérateurs du champ \vec{a}_n et \vec{a}_n^\dagger . La partie H_{int} dépend à la fois des opérateurs des particules et du champ. Les opérateurs du champ sont

$$\vec{A} = \sum_n \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_n}} \left[\vec{a}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} + \vec{a}_n^\dagger e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right], \quad \phi = \sum_n \phi_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (4.106)$$

(ϕ , donné par l'équation (4.38), et ses composantes de Fourier ϕ_n ne dépendent pas des \vec{a}_n),

$$\vec{E}_\perp = i \sum_n \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar \omega_n}{2\ell^3}} \left[\vec{a}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - \vec{a}_n^\dagger e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right], \quad \vec{E}_\parallel = -i \sum_n \phi_n \vec{k}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \quad (4.107)$$

et

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i \sum_n \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_n}} \left[\vec{k}_n \wedge \vec{a}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} - \vec{k}_n \wedge \vec{a}_n^\dagger e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}} \right]. \quad (4.108)$$

4.12 Espace des états

Champ libre

L'hamiltonien du champ libre

$$H_{\text{champ}} = \sum_{n\alpha} \hbar \omega_n \left(a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.109)$$

est la somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques indépendants. L'espace $\mathcal{E}_{\text{champ}}$ des états du champ libre est le produit tensoriel des espaces des divers oscillateurs. Une base des états est constituée des *états de Fock*⁸

$$|m_{n_1\alpha_1}, m_{n_2\alpha_2}, \dots\rangle = \frac{(a_{n_1\alpha_1}^\dagger)^{m_{n_1\alpha_1}}}{\sqrt{m_{n_1\alpha_1}!}} \frac{(a_{n_2\alpha_2}^\dagger)^{m_{n_2\alpha_2}}}{\sqrt{m_{n_2\alpha_2}!}} \dots |0\rangle. \quad (4.110)$$

A l'état fondamental $|0\rangle$, défini par $a_{n\alpha} |0\rangle = 0$ pour tout n et α , est associée une énergie absolue $E_0 = \langle 0 | H_{\text{champ}} | 0 \rangle = \sum_{n\alpha} \frac{\hbar \omega_n}{2}$ infinie. L'état (4.110) est vecteur propre de l'opérateur $N_{n\alpha} = a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha}$ avec la valeur propre $m_{n\alpha}$ et de l'hamiltonien du champ libre H_{champ} avec l'énergie $E_0 + \sum_{n\alpha} \hbar \omega_n m_{n\alpha}$.

8. Vladimir Alexandrovich Fock (1898-1974)

On interprète ces propriétés en introduisant les photons du mode $n\alpha$. Chacun est doté de l'énergie $\hbar\omega_n$, de la polarisation $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ et, comme on le verra section 4.13, de la quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_n$. L'opérateur $N_{n\alpha}$ est l'observable nombre de photons du mode $n\alpha$. L'état (4.110) décrit un état de $m_{n_1\alpha_1}$ photons du mode $n_1\alpha_1$, de $m_{n_2\alpha_2}$ photons du mode $n_2\alpha_2, \dots$. Son énergie par rapport au vide est la somme $\sum_{n\alpha} \hbar\omega_n m_{n\alpha}$ des énergies de tous ces photons. L'opérateur $a_{n\alpha}^\dagger$ crée un photon d'énergie $\hbar\omega_n$, de quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_n$ et de polarisation $\vec{\varepsilon}_n$; l'opérateur $a_{n\alpha}$ détruit un tel photon.

Champ + particules

L'espace des états des particules, sur lequel agissent les opérateurs \vec{x}_a et \vec{p}_a ($a = 1, N$), peut être identifié, pour des particules sans spin, à l'espace $\mathcal{E}_{\text{part}}$ des fonctions complexes $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ de module au carré sommable. L'espace des états du système champ + particules est le produit tensoriel $\mathcal{E}_{\text{part}} \otimes \mathcal{E}_{\text{champ}}$. Si $|a\rangle$ ($a = 1, 2, \dots$) désigne une base de $\mathcal{E}_{\text{part}}$, formée de vecteurs propres de H_{part} , une base des états du système est constituée des états

$$|a, m_{n_1\alpha_1}, m_{n_2\alpha_2}, \dots\rangle = |a\rangle \otimes |m_{n_1\alpha_1}, m_{n_2\alpha_2}, \dots\rangle \quad (4.111)$$

qui sont les vecteurs propres de $H_{\text{part}} + H_{\text{champ}}$.

Remarque : dans le traitement relativiste, le nombre de particules (électrons, positrons, etc.) est variable. On peut utiliser une base des états particulaires qui spécifie les nombres d'occupation des particules dans chaque état normal possible. Pour des particules de spin demi-entier ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$), qui sont des fermions⁹, les nombres d'occupation sont 0 ou 1 (les champs correspondants sont quantifiés à l'aide d'anticommutateurs). Pour des particules de spin entier, qui sont des bosons, les nombres d'occupation $m_{n\alpha}$ peuvent prendre toutes les valeurs entières (les champs correspondants sont quantifiés à l'aide de commutateurs).

Fonction d'onde d'un état à un seul photon

Un état $|\Psi(t)\rangle$ à un seul photon se développe sur les états à un photon de la base (4.110) :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n\alpha} \psi_1(\vec{k}_n, \alpha, t) a_{n\alpha}^\dagger |0\rangle. \quad (4.112)$$

Il est ainsi décrit par une fonction d'onde $\psi_1(\vec{k}, \alpha)$. La fonction d'onde $\psi_1(\vec{k}, \alpha) = \delta(\vec{k} - \vec{k}_n) \delta_{\alpha\beta}$ correspond à l'état $a_{n\beta}^\dagger |0\rangle$, c'est à dire à un photon de quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_n$ et de polarisation $\vec{\varepsilon}_{n\beta}$. Cela suggère d'introduire une fonction d'onde vectorielle définie dans l'espace réciproque (fonction de

9. Enrico Fermi (1901-1954)

l'impulsion \vec{p}) en posant $\vec{\psi}(\vec{p}, t) = \sum_{\alpha} \psi_1(\vec{k}_n, \alpha, t) \vec{\varepsilon}_{n\alpha}$ pour $\vec{p} = \hbar \vec{k}_n$. Voici quelques propriétés de cette fonction d'onde.

- Elle vérifie la contrainte

$$\vec{p} \cdot \vec{\psi}(\vec{p}, t) = 0. \quad (4.113)$$

- La probabilité de mesurer la quantité de mouvement \vec{p} est $|\vec{\psi}(\vec{p}, t)|^2$.
- Le caractère vectoriel correspond au spin $s = 1$ du photon (une particule de spin $s = 1/2$ est décrite par un spineur à 2 composantes et plus généralement une particule de spin s par $2s + 1$ composantes). Ce point sera détaillé dans la section 4.14
- La fonction d'onde est définie dans l'espace réciproque. Une particule massive de spin $s = 1$ peut être décrite par une fonction d'onde vectorielle dans l'espace des positions ou des impulsions. Ainsi une telle particule localisée en \vec{r}_0 est décrite par la fonction d'onde $\vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{A} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ou $\vec{\psi}(\vec{p}) = \vec{A} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}_0 / \hbar}$, où \vec{A} est un vecteur constant. La fonction d'onde $\vec{\psi}(\vec{p}) = \vec{A} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r}_0 / \hbar}$ ne satisfait pas à la contrainte (4.113) et ne peut être utilisée pour former un état à un photon localisé en \vec{r}_0 . Il serait souhaitable, par exemple pour décrire une expérience d'interférences à un photon, de pouvoir définir l'état à un photon localisé en \vec{r}_0 et la fonction d'onde dans l'espace des positions. Mais c'est impossible d'après Newton et Wigner¹⁰ qui ont montré qu'il n'existe pas d'états localisés d'une particule de masse nulle.
- Si la fonction d'onde $\vec{\psi}(\vec{p}, t)$ convient pour décrire un photon libre, ce n'est plus le cas en présence d'interactions avec la matière car alors le nombre de photons n'est plus constant (phénomènes d'émission et absorption de photons).

Évolution du système

Dans le point de vue de Schrödinger, l'évolution du système est donnée par l'équation

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle = (H_{\text{part}} + H_{\text{champ}} + H_{\text{int}}) |\Psi(t)\rangle. \quad (4.114)$$

En partant des états (4.111), vecteurs propres de $H_{\text{part}} + H_{\text{champ}}$, et en traitant H_{int} comme une perturbation on peut en obtenir des solutions approchées par la méthode des perturbations.

10. T. D. Newton and E. P. Wigner¹¹, Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949)

11. Eugene Paul Wigner (1902-1995)

4.13 Quantité de mouvement du champ

La quantité de mouvement classique du champ est

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (4.115)$$

La transformation d'un produit $\psi_1\psi_2$ de deux grandeurs classiques en opérateur pose un problème lorsque les opérateurs quantiques correspondants ψ_1 et ψ_2 ne commutent pas. Une façon de procéder, pour des champs quantiques donnés en fonctions d'opérateurs création-destruction, est de former le *produit normal* : $\psi_1\psi_2$: qui consiste à récrire chaque produit d'opérateurs création-destruction en déplaçant les opérateurs destruction à droite des opérateurs création (sans tenir compte des commutateurs non nuls). Ainsi : $aa^\dagger : = a^\dagger a$, $:a_1^\dagger a_2^\dagger : = a_1^\dagger a_2^\dagger$. L'opérateur ainsi obtenu a une valeur moyenne nulle pour l'état du vide. Avant d'appliquer cette méthode à \vec{P} , écrivons d'abord sa composante P^i en fonction de \vec{E} et \vec{A} .

$$P^i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \underbrace{e^{ijk} e^{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} \int d^3x E^j \partial^l A^m = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x (E^j \partial^i A^j - E^j \partial^j A^i). \quad (4.116)$$

Pour $\phi = 0$ (champ libre) $\partial^j E^j = 0$ et le deuxième terme est nul :

$$-\frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x E^j \partial^j A^i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x (\partial^j E^j) A^i = 0. \quad (4.117)$$

Nous définissons l'opérateur P^i par

$$P^i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x : E^j \partial^i A^j : \quad (4.118)$$

où nous substituons les opérateurs

$$\vec{E} = \sum_n \vec{E}_n e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}, \quad \text{avec} \quad \vec{E}_n = i \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar \omega_n}{2\ell^3}} (\vec{a}_n - \vec{a}_{-n}^\dagger) \quad (4.119)$$

et

$$\vec{A} = \sum_m \vec{A}_{-m} e^{-i\vec{k}_m \cdot \vec{r}}, \quad \text{avec} \quad \vec{A}_{-m} = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_m}} (\vec{a}_{-m} + \vec{a}_m^\dagger). \quad (4.120)$$

Il vient

$$\begin{aligned} P^i &= \frac{1}{\mu_0 c^2} \sum_{mn} \int d^3x e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} : E_n^j (-ik_m^i) A_{-m}^j : \\ &= \frac{\ell^3}{\mu_0 c^2} \sum_n : E_n^j (-ik_n^i) A_{-n}^j : \quad (4.121) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= -\frac{i\ell^3}{\mu_0 c^2} \sum_n \vec{k}_n : \vec{E}_n \cdot \vec{A}_{-n} : = \sum_n \frac{\hbar \vec{k}_n}{2} : (\vec{a}_n - \vec{a}_{-n}^\dagger) \cdot (\vec{a}_{-n} + \vec{a}_n^\dagger) : \\
&= \sum_n \frac{\hbar \vec{k}_n}{2} \times \left(\vec{a}_n \cdot \vec{a}_{-n} + \underbrace{\vec{a}_n^\dagger \cdot \vec{a}_n}_{\text{forme normale}} - \vec{a}_{-n}^\dagger \cdot \vec{a}_{-n} - \vec{a}_{-n}^\dagger \cdot \vec{a}_n^\dagger \right) = \sum_n \hbar \vec{k}_n \left(\vec{a}_n^\dagger \cdot \vec{a}_n \right) \\
&= \sum_{n\alpha} \hbar \vec{k}_n a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} \quad (4.122)
\end{aligned}$$

(on utilise $\vec{k}_{-n} = -\vec{k}_n$ dans l'avant dernière égalité).

L'état (4.110) est vecteur propre de la quantité de mouvement \vec{P} avec la valeur propre $\sum_{n\alpha} \hbar \vec{k}_n m_{n\alpha}$, ce qui s'interprète simplement en attribuant à chaque photon du mode $n\alpha$ la quantité de mouvement $\hbar \vec{k}_n$.

Remarque : Pour $\phi \neq 0$ la contribution de $E_{\parallel} = -\vec{\nabla} \phi$ à (4.118) est nulle :

$$\int d^3x (\partial^j \phi) (\partial^i A^j) = - \int d^3x \phi (\partial^j \partial^i A^j) = 0 \quad (4.123)$$

en vertu de $\partial^j A^j = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. L'expression (4.117) n'est plus nulle et vaut

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x (\partial^j E^j) A^i = \int d^3x \rho A^i = \sum_{a=1}^N q_a A^i(\vec{x}_a, t). \quad (4.124)$$

Rajoutant la quantité de mouvement $m_a \dot{x}_a^i$ des particules, on obtient (cf. équation (4.73)) que l'opérateur quantité de mouvement du système champ + particules est

$$\vec{P}_{\text{syst}} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a + \sum_n \hbar \vec{k}_n \left(\vec{a}_n^\dagger \cdot \vec{a}_n \right). \quad (4.125)$$

4.14 Spin

Particule de spin 1

On explique d'abord pourquoi une fonction d'onde vectorielle décrit une particule de spin 1. Examinons l'action d'une rotation d'angle θ autour de Oz d'une fonction d'onde vectorielle localisée à l'origine $\vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{A} \delta^{(3)}(\vec{r})$ où le vecteur constant $\vec{A} = A_i \vec{e}_i$ a les composantes A_i sur la base cartésienne¹² \vec{e}_i . Dans la rotation de matrice $R = (R_{ij})$, la fonction d'onde devient $\vec{\phi}'(\vec{r}) = \vec{A}' \delta^{(3)}(\vec{r})$ avec $A'_i = R_{ij} A_j$,

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{-i S_z \theta} \quad \text{où} \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.126)$$

12. René du Perron Descartes (1596-1650)

Les rotations autour des autres axes de coordonnées permettent de définir de même l'opérateur S_i de matrice $(S_i)_{jk} = -ie_{ijk}$. Les opérateurs $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ vérifient les relations de commutation des composantes d'un moment cinétique $\hbar\vec{S}$ ($[S_i, S_j] = ie_{ijk}S_k$) et le calcul du carré donne

$$\vec{S}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = s(s+1), \quad \text{avec} \quad s = 1. \quad (4.127)$$

La fonction d'onde correspond bien à une particule de spin $s = 1$. La base standard $|m\rangle$, $m = -1, 0, 1$ des vecteurs propres de S_z ($S_z|m\rangle = m|m\rangle$) est

$$|\pm 1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y), \quad |0\rangle = \vec{e}_z. \quad (4.128)$$

La particule envisagée était localisée à l'origine (elle est massive). Pour une particule non localisée, l'action de la rotation d'angle θ autour de l'axe i est donnée par l'opérateur $e^{-iJ_i\theta}$ où $\hbar\vec{J} = \hbar\vec{L} + \hbar\vec{S}$ est le moment cinétique total, somme du moment cinétique orbital $\hbar\vec{L}$ et du spin.

Cas du photon

Examinons un photon de quantité de mouvement $\hbar\vec{k}_n$, parallèle à Oz , décrit par la fonction d'onde vectorielle $\vec{\psi}(\vec{p}, t) = \vec{A}\delta(\vec{p} - \hbar\vec{k}_n)$. Une rotation d'angle θ autour de Oz laisse $\delta(\vec{p} - \hbar\vec{k}_n)$ inchangé et transforme \vec{A} selon (4.126). On attribue ainsi un spin 1 au photon, comme pour la particule massive. Toutefois, \vec{A} doit être perpendiculaire à Oz pour le photon envisagé et se développe seulement sur les états $m = \pm 1$ de la base standard (4.128). Ces états correspondent à la base d'états de polarisation circulaire

$$\vec{e}_{n\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) \quad (4.129)$$

qui est une transformation unitaire du type (4.96) de la base transverse (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .

Les états de spin d'un photon (autrement dit de polarisation), pour $\hbar\vec{k}_n$ donné, forment un espace de dimension 2 au lieu de 3 pour une particule de spin 1 et de masse non nulle. Une autre différence avec les particules massives consiste en ce que \vec{S} et \vec{L} ne sont pas séparément des observables physiques, seule leur somme (le moment cinétique total) est une observable. En effet, il n'est pas possible de définir les trois composantes S_i comme observables physiques par suite de la non existence de photons au repos. Nous avons pu toutefois définir la composante du spin le long de l'impulsion du photon (S_z ci-dessus) qui est une observable physique appelée hélicité.

Ces particularités se retrouvent pour une particule de masse nulle et de spin s : l'hélicité prend seulement les valeurs propres $\pm s$ (pour une particule massive, les valeurs propres de l'hélicité sont les $2s + 1$ valeurs $-s, -s + 1, \dots, s - 1, s$).

4.15 Émission spontanée

On applique la théorie quantique du rayonnement pour expliquer l'émission spontanée d'un atome. Prenons un atome hydrogénoïde formé d'un noyau ponctuel de charge Ze , supposé au repos à l'origine, et d'un électron de masse m en \vec{r}_e et négligeons les spins de ces particules. L'hamiltonien du système champ + particules est

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_{\text{int}} \\
 H_0 &= H_{\text{part}} + H_{\text{champ}} \\
 H_{\text{part}} &= \frac{\vec{p}_e^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} \\
 H_{\text{champ}} &= \sum_{n\alpha} \hbar\omega_n a_{n\alpha}^\dagger a_{n\alpha} \quad (\text{énergies par rapport au vide}) \\
 H_{\text{int}} &= \frac{e}{m} \vec{A}(\vec{r}_e) \cdot \vec{p}_e + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2(\vec{r}_e).
 \end{aligned} \tag{4.130}$$

Nous voulons calculer le taux de transition (probabilité de transition par unité de temps) pour que l'atome dans un état initial excité a passe dans l'état b en émettant un photon.

4.15.1 Représentation d'interaction

On veut calculer le taux de transition entre deux états propres de H_0 sous l'effet de la perturbation H_{int} . On démontre dans cette section l'expression de ce taux au premier ordre des perturbations (règle d'or de Fermi). Il est commode d'utiliser la *représentation d'interaction*. Dans la représentation de Heisenberg (cf. section 4.1.1), les vecteurs d'état $|\psi_H\rangle$ sont fixes et les observables $A_H(t)$ évoluent au cours du temps. On a

$$|\psi_H\rangle = U^{-1}(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \tag{4.131}$$

$$A_H(t) = U^{-1}(t, t_0) A_S U(t, t_0) \tag{4.132}$$

en fonction des vecteurs d'état $|\psi_S(t)\rangle$ et observables A_S en représentation de Schrödinger. L'opérateur d'évolution $U(t, t_0)$ vérifie

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = (H_0 + H_{\text{int}}) U(t, t_0) \quad \text{et} \quad U(t_0, t_0) = 1. \tag{4.133}$$

Dans la représentation d'interaction, les vecteurs d'état $|\psi_I(t)\rangle$ et les observables $A_I(t)$ sont

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^{-1}(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \tag{4.134}$$

$$A_I(t) = U_0^{-1}(t, t_0) A_S U_0(t, t_0) \tag{4.135}$$

où l'opérateur d'évolution $U_0(t, t_0)$ correspond à l'hamiltonien H_0 :

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_0(t, t_0) = H_0 U_0(t, t_0) \quad \text{et} \quad U_0(t_0, t_0) = 1. \quad (4.136)$$

L'observable physique associée à l'opérateur A s'obtient par

$$\underbrace{\langle \psi_S(t) | A_S | \psi_S(t) \rangle}_{\text{représ. Schrödinger}} = \underbrace{\langle \psi_I(t) | A_I(t) | \psi_I(t) \rangle}_{\text{représ. interaction}}. \quad (4.137)$$

Si l'interaction H_{int} est négligeable, la représentation d'interaction coïncide avec le point de vue de Heisenberg et $|\psi_I(t)\rangle$ est indépendant du temps. Soit l'opérateur unitaire $U_I(t, t_0)$ défini par

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\psi_H\rangle. \quad (4.138)$$

D'après les équations (4.131) (4.134) et (4.138)

$$|\psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_H\rangle = U_0(t, t_0) U_I(t, t_0) |\psi_H\rangle. \quad (4.139)$$

D'où

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0) U_I(t, t_0). \quad (4.140)$$

L'opérateur $U_I(t, t_0)$ ne vérifie pas une loi de composition multiplicative comme U_0 ou U :

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= U(t, t_1) U(t_1, t_0), \\ U_0(t, t_0) &= U_0(t, t_1) U_0(t_1, t_0), \end{aligned} \quad \text{mais} \quad U_I(t, t_0) \neq U_I(t, t_1) U_I(t_1, t_0). \quad (4.141)$$

En dérivant l'équation (4.140) et d'après les équations (4.133) et (4.136)

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = (H_0 + H_{\text{int}}) U_0 U_I = i\hbar \frac{dU_0}{dt} U_I + U_0 i\hbar \frac{dU_I}{dt} = H_0 U_0 U_I + U_0 i\hbar \frac{dU_I}{dt}. \quad (4.142)$$

Posons

$$H_{\text{I, int}}(t) = U_0^{-1}(t, t_0) H_{\text{int}} U_0(t, t_0). \quad (4.143)$$

L'opérateur $U_I(t, t_0)$ vérifie

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t, t_0) = H_{\text{I, int}}(t) U_I(t, t_0) \quad \text{et} \quad U_I(t_0, t_0) = 1. \quad (4.144)$$

Cela équivaut à l'équation intégrale

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{I, int}}(t') U_I(t', t_0) dt'. \quad (4.145)$$

Si l'interaction $H_{\text{I, int}}(t)$ est suffisamment petite, on peut résoudre cette équation par itération : $U_I^{(0)}(t, t_0) = 1$ à l'ordre 0 ;

$$U_I^{(1)}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_{\text{I, int}}(t') dt' \quad (4.146)$$

jusqu'à l'ordre 1. En poursuivant les itérations on obtient la solution sous forme de série perturbative :

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 H_{I, \text{int}}(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{I, \text{int}}(t_1) H_{I, \text{int}}(t_2) + \dots \quad (4.147)$$

Considérons des états propres $|i\rangle$ et $|f\rangle$ de H_0 indépendants du temps

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle \quad \text{et} \quad H_0 |f\rangle = E_f |f\rangle. \quad (4.148)$$

Déterminons l'amplitude de transition $i \rightarrow f$ de l'état i à l'instant $t_0 = -T/2$ vers l'état f à l'instant $T/2$. C'est, en désignant par $|\psi_I(t)\rangle$ l'état à l'instant t vers lequel évolue $|i\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle$,

$$S_{fi}(T) = \langle f | \psi_I(T/2) \rangle = \langle f | U_I(T/2, -T/2) | i \rangle. \quad (4.149)$$

En se limitant au premier ordre des perturbations, l'amplitude de transition est donnée par

$$S_{fi}^{(1)}(T) = \left\langle f \left| U_I^{(1)}(T/2, -T/2) \right| i \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \left\langle f \left| \int_{-T/2}^{T/2} H_{I, \text{int}}(t') dt' \right| i \right\rangle \quad (4.150)$$

pour des états orthogonaux ($\langle f | i \rangle = 0$). Utilisant

$$U_0(t, t_0) |i\rangle = e^{-iE_i(t-t_0)/\hbar} |i\rangle, \quad \langle f | U_0^{-1}(t, t_0) = \langle f | e^{iE_f(t-t_0)/\hbar} \quad (4.151)$$

et H_{int} indépendant du temps, on a, posant $\Delta E = E_f - E_i$,

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)}(T) &= -\frac{i}{\hbar} \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\frac{E_f - E_i}{\hbar}(t' + T/2)} dt' \\ &= -2i \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle e^{iT\Delta E/2\hbar} \frac{\sin \frac{T\Delta E}{2\hbar}}{\Delta E} \end{aligned} \quad (4.152)$$

Le probabilité par unité de temps $\Delta W_{i \rightarrow f}(T)$ pour observer la transition $i \rightarrow f$ est

$$\Delta W_{i \rightarrow f}(T) = \frac{|S_{fi}^{(1)}(T)|^2}{T} = |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2 f_T(E_f - E_i) \quad (4.153)$$

où

$$f_T(x) = \frac{4}{T} \left(\frac{\sin \frac{T x}{2\hbar}}{x} \right)^2 \quad (4.154)$$

On s'intéresse à la limite $\Delta W_{i \rightarrow f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \Delta W_{i \rightarrow f}(T)$. Montrons que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(x). \quad (4.155)$$

Quand $T \rightarrow \infty$, $f_T(x)$ tend vers 0 sauf si $x = 0$. Le résultat (4.155) découle alors de

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_T(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\hbar^2 T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{i\frac{x}{\hbar}(t-t')} \\ &= \frac{1}{\hbar^2 T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\frac{x}{\hbar}(t-t')}}_{2\pi\hbar\delta(t-t')} = \frac{2\pi}{\hbar}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Le taux de transition $\Delta W_{i \rightarrow f}$ est donc (c'est la règle d'or de Fermi)

$$\Delta W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle|^2. \quad (4.157)$$

4.15.2 Calcul du taux de transition

Le taux de transition de l'état $|i\rangle = |a, 0\rangle$ (atome dans l'état $\psi_a(\vec{r}_e)$, pas de photons) vers l'état $|f\rangle = |b, 1_{n\alpha}\rangle$ (atome dans l'état $\psi_b(\vec{r}_e)$, un photon dans le mode $n\alpha$ de fréquence ω_n , vecteur d'onde \vec{k}_n et polarisation $\vec{\varepsilon}_{n\alpha}$) est donné par l'équation (4.157) avec $E_i = E_a$, $E_f = E_b + \hbar\omega_n$ et

$$\begin{aligned} \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle &= \frac{e}{m} \langle b, 1_{n\alpha} | \vec{A}(\vec{r}_e) \cdot \vec{p}_e | a, 0 \rangle \\ &= -\frac{ie\hbar}{m} \int d^3r_e \langle 1_{n\alpha} | \vec{A}(\vec{r}_e) | 0 \rangle \cdot \psi_b^*(\vec{r}_e) \vec{\nabla}_e \psi_a(\vec{r}_e), \end{aligned} \quad (4.158)$$

puisque $\langle 1_{n\alpha} | \vec{A}^2(\vec{r}_e) | 0 \rangle = 0$ ($\vec{A}^2(\vec{r}_e)$ s'écrit en fonction de produits de deux opérateurs création-destruction qui ne changent pas la parité du nombre de photons).

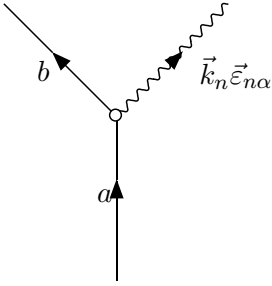


FIG. 4.2 – Diagramme de Feynman.

$$\begin{aligned} \langle 1_{n\alpha} | \vec{A}(\vec{r}_e) | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{n\alpha} \vec{A}(\vec{r}_e) | 0 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_n}} \langle 0 | a_{n\alpha} a_{n\alpha}^\dagger | 0 \rangle \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_e} = \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_n}} \vec{\varepsilon}_{n\alpha}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_e} \end{aligned} \quad (4.159)$$

Le calcul de la série perturbative (4.147) se prête à une représentation graphique. L'amplitude de transition calculée ici est représentée par le diagramme de Feynman¹³ ci-contre. On lit le diagramme de bas en haut (axe du temps).

13. Richard Phillips Feynman (1918-1988)

Pour un atome hydrogénoïde $\psi_a(\vec{r}_e)$ est localisée :

$$r_e \lesssim \frac{a_0}{Z}, \quad \text{où} \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,529\,177\,249\,10^{-10} \text{ m} \quad (4.160)$$

est le rayon de Bohr¹⁴. Pour l'énergie de transition on a l'estimation

$$\hbar\omega_n \lesssim \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = 27,211\,396\,Z^2 \text{ eV} \quad (4.161)$$

de sorte que $|\vec{k}_n \cdot \vec{r}_e| \lesssim \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{Z}{137,035\,989}$ (Z fois la constante de structure fine) dans l'intégrale (4.158). Pour Z pas trop grand, on peut faire

$$e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_e} \approx 1 \quad (4.162)$$

qui est l'approximation dipolaire électrique (cf. section 5.4.7). Cela donne

$$\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2 \hbar}{2\ell^3 \omega_n}} \vec{\epsilon}_{n\alpha}^* \cdot \vec{p}_{ba} \quad \text{où} \quad \vec{p}_{ba} = -i\hbar \int d^3 r_e \psi_b^*(\vec{r}_e) \vec{\nabla}_e \psi_a(\vec{r}_e). \quad (4.163)$$

Le taux différentiel de transition $\Delta W_{i \rightarrow f}$ est donc

$$\Delta W_{i \rightarrow f} = 2\pi \delta(E_b + \hbar\omega_n - E_a) \frac{e^2 \mu_0 c^2}{m^2 2\ell^3 \omega_n} |\vec{\epsilon}_{n\alpha}^* \cdot \vec{p}_{ba}|^2 \quad (4.164)$$

et le taux de transition total $a \rightarrow b$ s'obtient en sommant sur les états de photons

$$W_{a \rightarrow b} = \sum_{n\alpha} \frac{\pi e^2 \mu_0 c}{m^2 \ell^3 k_n} \delta(E_b + \hbar c k_n - E_a) |\vec{\epsilon}_{n\alpha}^* \cdot \vec{p}_{ba}|^2. \quad (4.165)$$

On transforme la somme sur n en intégrale

$$\text{(cf. équation (4.54))} \quad \sum_n \left(\frac{2\pi}{\ell} \right)^3 \longrightarrow \int d^3 k = \int k^2 dk d\Omega_k$$

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b} &= \frac{e^2 \mu_0 c}{8\pi^2 m^2} \int k dk d\Omega_k \sum_{\alpha} \delta(E_b + \hbar c k - E_a) |\vec{\epsilon}_{k\alpha}^* \cdot \vec{p}_{ba}|^2 \\ &= \frac{e^2 \mu_0 \omega}{8\pi^2 \hbar c m^2} \int d\Omega_k \sum_{\alpha} |\vec{\epsilon}_{k\alpha}^* \cdot \vec{p}_{ba}|^2 \quad (4.166) \end{aligned}$$

où $\omega = (E_a - E_b)/\hbar$. Écrivons $W_{a \rightarrow b} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\omega}{2\pi m^2 c^2} p_{ba}^i d^{ij} p_{ba}^{j*}$, avec sommation sur les indices répétés i, j , où on a posé

$$d^{ij} = \int d\Omega_k \sum_{\alpha} \epsilon_{k\alpha}^{i*} \epsilon_{k\alpha}^j = \int d\Omega_k \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) \quad (4.167)$$

14. Niels Henrik David Bohr (1885-1962)

d'après l'équation (4.58). Le tenseur d^{ij} est invariant dans les rotations R^i_j (on pose $k'^i = R^i_l k^l$):

$$\begin{aligned} R^i_l R^j_m d^{lm} &= \int d\Omega_k \left(R^i_l R^j_m \delta^{lm} - \frac{R^i_l k^l R^j_m k^m}{k^2} \right) \\ &= \int d\Omega_k \left(\delta^{ij} - \frac{k'^i k'^j}{k'^2} \right) = \int d\Omega_{k'} \left(\delta^{ij} - \frac{k'^i k'^j}{k'^2} \right) = d^{ij}. \end{aligned} \quad (4.168)$$

En matrice $\mathbf{Rd}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{d}$ ou $\mathbf{Rd} = \mathbf{dR}$ pour toute rotation \mathbf{R} ce qui implique que \mathbf{d} est un multiple de la matrice unité $d^{ij} = K\delta^{ij}$. On obtient K en faisant $i = j$ dans (4.167): $d^{ii} = 3K = \int d\Omega_k \left(\delta^{ii} - \frac{k^i k^i}{k^2} \right) = \int d\Omega_k (3 - 1) = 8\pi$.

On a donc $d^{ij} = \frac{8\pi}{3}\delta^{ij}$ et le taux de transition total $a \rightarrow b$ par émission spontanée est

$$\boxed{W_{a \rightarrow b} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{4\omega}{3m^2 c^2} |\vec{p}_{ba}|^2.} \quad (4.169)$$

On peut donner une autre expression de ce taux en fonction de

$$\vec{r}_{ba} = \int d^3 r_e \psi_b^*(\vec{r}_e) \vec{r}_e \psi_a(\vec{r}_e). \quad (4.170)$$

De la relation $[H_{\text{part}}, \vec{r}_e] = -\frac{i\hbar\vec{p}_e}{m}$ on tire

$$\vec{p}_{ba} = \frac{im}{\hbar} \langle b | [H_{\text{part}}, \vec{r}_e] | a \rangle = -\frac{im(E_a - E_b)}{\hbar} \vec{r}_{ba} = -im\omega \vec{r}_{ba}. \quad (4.171)$$

On en déduit une autre forme du taux de transition total $a \rightarrow b$ par émission spontanée

$$\boxed{W_{a \rightarrow b} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{4\omega^3}{3c^2} |\vec{r}_{ba}|^2.} \quad (4.172)$$

5

Théorie classique du rayonnement

5.1 Fonction de Green

5.1.1 Résolution d'équation

Nous voulons résoudre l'équation d'onde avec second membre

$$\square \psi(\vec{x}) = \partial_\mu \partial^\mu \psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{x}) \quad (5.1)$$

où on pose $\vec{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r})$. La solution est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière. Nous cherchons ici une solution particulière. Supposons que nous ayons trouvé une *fonction de Green*¹, c'est-à-dire une solution $G(\vec{x})$ de l'équation

$$\square G(\vec{x}) = \delta^{(4)}(\vec{x}). \quad (5.2)$$

La convolution de G et Φ ,

$$\psi(\vec{x}) = \int d^4x' G(\vec{x} - \vec{x}') \Phi(\vec{x}'), \quad (5.3)$$

est une solution de l'équation (5.1) :

$$\begin{aligned} \square_{\vec{x}} \psi(\vec{x}) &= \square_{\vec{x}} \int d^4x' G(\vec{x} - \vec{x}') \Phi(\vec{x}') = \int d^4x' \square_{\vec{x}} G(\vec{x} - \vec{x}') \Phi(\vec{x}') \\ &= \int d^4x' \delta^{(4)}(\vec{x} - \vec{x}') \Phi(\vec{x}') = \Phi(\vec{x}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

La notation $\square_{\vec{x}}$ a été utilisée pour souligner que l'opérateur agit sur \vec{x} .

1. George Green (1793-1841)

5.1.2 Fonction de Green

Nous cherchons une solution de

$$\square G(\vec{x}) = \delta^{(4)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (5.5)$$

avec les notations : $\vec{k} = (k^\mu) = (k^0, \vec{k})$, $\vec{k} \cdot \vec{x} = k_\mu x^\mu$. Posons

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{G}(\vec{k}). \quad (5.6)$$

On a

$$\begin{aligned} \square G(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \left(\partial_\nu \partial^\nu e^{-ik_\mu x^\mu} \right) \hat{G}(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \left((-ik_\nu)(-ik^\nu) e^{-ik_\mu x^\mu} \right) \hat{G}(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik_\mu x^\mu} (-k_\nu k^\nu) \hat{G}(\vec{k}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

D'où

$$\hat{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \frac{1}{\vec{k}^2 - k_0^2} \quad (5.8)$$

et

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k_\mu k^\mu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - ik_0 x^0}}{\vec{k}^2 - k_0^2}. \quad (5.9)$$

L'expression est ambiguë car le dénominateur s'annule. Posons

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{-ik_0 x^0} f(\vec{r}, k_0) \quad \text{où} \quad f(\vec{r}, k_0) = \int d^3 k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\vec{k}^2 - k_0^2}. \quad (5.10)$$

Calculons d'abord $f(\vec{r}, k_0)$ pour k_0 complexe avec $\text{Im } k_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, k_0) &= 2\pi \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2 - k_0^2} \\ &= \frac{2\pi}{ir} \int_0^\infty k dk \frac{1}{k^2 - k_0^2} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \\ &= \frac{2\pi}{ir} \left(\int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - k_0^2} e^{ikr} - \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - k_0^2} e^{-ikr} \right) = \frac{2\pi}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{k^2 - k_0^2} e^{ikr}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Le contour $\Gamma(R)$ est formé de l'intervalle $[-R, R]$ fermé par un demi-cercle dans le demi-plan $\text{Im } k \geq 0$ (cf. figure 5.1). Comme $r > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{ikr} dk}{k^2 - k_0^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} \frac{k e^{ikr} dk}{k^2 - k_0^2} \quad (5.12)$$

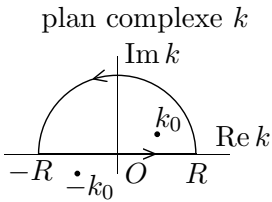


FIG. 5.1 – Contour $\Gamma(R)$.

vaut $2\pi i$ fois le résidu de $\frac{ke^{ikr}}{k^2 - k_0^2} = \frac{ke^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)}$ au pôle situé dans le demi-plan $\text{Im } k > 0$. Si $\text{Im } k_0 > 0$, le pôle dans le demi-plan supérieur est en $k = k_0$ et le résidu vaut $e^{ik_0 r}/2$. Si $\text{Im } k_0 < 0$, le pôle dans le demi-plan supérieur est en $k = -k_0$ et le résidu vaut $e^{-ik_0 r}/2$. On a donc

$$f(\vec{r}, k_0) = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{r} e^{ik_0 r} & \text{si } \text{Im } k_0 > 0 \\ \frac{2\pi^2}{r} e^{-ik_0 r} & \text{si } \text{Im } k_0 < 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Posons, pour k_0 réel,

$$f_{\pm}(\vec{r}, k_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\vec{r}, k_0 \pm i\epsilon) = \frac{2\pi^2}{r} e^{\pm ik_0 r}. \quad (5.14)$$

On en déduit deux fonctions de Green

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{-ik_0 x^0} f_{\pm}(\vec{r}, k_0) = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{ik_0(-x^0 \pm r)} \\ &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4 r} 2\pi \delta(-x^0 \pm r), \end{aligned} \quad (5.15)$$

soit

$$\boxed{G_{\pm}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r \mp ct)}. \quad (5.16)$$

$G_+(\vec{x})$ est la **fonction de Green retardée** : la source est en $\vec{x} = 0$ et $G_+(\vec{x})$ est localisée sur le cône de lumière futur de la source ($r = ct$).

$G_-(\vec{x})$ est la **fonction de Green avancée** : $G_-(\vec{x})$ est localisée sur le cône de lumière passé de la source ($r = -ct$).

D'après l'équation (5.2), qui a la même forme dans tous les référentiels, on s'attend à ce que les fonctions de Green soient des invariants scalaires dans les transformations de Lorentz orthochrones :

$$G_{\pm}(\vec{x}) = G_{\pm}(\vec{x}'). \quad (5.17)$$

On peut en effet écrire l'expression presque explicitement covariante

$$G_{\pm}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x^0) \delta(\vec{x} \cdot \vec{x}) \quad (5.18)$$

où la fonction de Heaviside²

$$\theta(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \\ \text{arbitraire} & \text{si } u = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

2. Oliver Heaviside (1850-1925)

ne sert qu'à sélectionner le cône de lumière futur ou passé de l'origine. On montre l'équivalence des formes (5.18) et (5.16) en utilisant la relation

$$\delta(f(r)) = \sum_i \frac{\delta(r - r_i)}{|f'(r_i)|} \quad (5.20)$$

où la somme porte sur les racines r_i de l'équation $f(r) = 0$.

$$\frac{1}{2\pi} \theta(\pm x^0) \delta(r^2 - c^2 t^2) = \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x^0) \left[\frac{\delta(r - ct)}{|2ct|} + \frac{\delta(r + ct)}{|2ct|} \right] = \frac{1}{4\pi r} \delta(r \mp ct). \quad (5.21)$$

Remarquer que, comme pour la fonction $\delta^{(4)}(\vec{x})$ (cf. équation (1.103)) ou encore comme pour une fonction $f(\vec{x} \cdot \vec{x})$, les fonctions de Green (5.16) gardent la même expression dans tous les référentiels (en général, la forme d'une fonction scalaire change avec le référentiel comme dans l'exemple après l'équation (1.98)).

5.2 Potentiels retardés

Nous voulons déterminer le quadripotentiel A^α en jauge de Lorenz correspondant au quadricourant j^α . On cherche une solution de

$$\square A^\alpha = \mu_0 j^\alpha \quad (5.22)$$

vérifiant la condition de Lorenz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (5.23)$$

Portons la fonction de Green retardée (5.16) dans (5.3) :

$$A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{x}) = \mu_0 \int d^4 x' G_+(\vec{x} - \vec{x}') j^\alpha(\vec{x}') = \mu_0 \int d^4 x' G_+(\vec{x}') j^\alpha(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (5.24)$$

Cette solution vérifie automatiquement la condition de Lorenz :

$$\partial_\alpha A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{x}) = \mu_0 \int d^4 x' G_+(\vec{x}') \partial_\alpha j^\alpha(\vec{x} - \vec{x}') = 0 \quad (5.25)$$

en vertu de la conservation du courant. On a

$$\begin{aligned} A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{x}) &= \mu_0 \int d^4 x' \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t - t')) j^\alpha(\vec{r}', t') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int d(ct') \delta(ct' - ct + |\vec{r} - \vec{r}'|) j^\alpha(\vec{r}', t') \end{aligned} \quad (5.26)$$

soit

$$\boxed{A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j^\alpha\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}. \quad (5.27)$$

C'est le *quadripotentiel retardé* : le quadripotentiel au point \vec{r} et à l'instant t s'écrit en fonction du quadricourant au point \vec{r}' à l'instant retardé $t - R/c$ ($R = |\vec{r} - \vec{r}'|$), le retard étant le temps que met la lumière pour aller de \vec{r}' à \vec{r} . La solution générale de (5.22) est

$$A^\alpha(\vec{x}) = A_{\text{in}}^\alpha(\vec{x}) + A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{x}) \quad (5.28)$$

où $A_{\text{in}}^\alpha(\vec{x})$ est une solution de l'équation d'onde homogène et $A_{\text{ret}}^\alpha(\vec{x})$ est donné par l'équation (5.27). Si les sources sont localisées dans l'espace-temps ($j^\alpha(\vec{r}, t) = 0$ pour $t < t_0$), le quadripotentiel retardé s'annule pour $t < t_0$ et

$$A^\alpha(\vec{r}, t) = A_{\text{in}}^\alpha(\vec{r}, t) \quad \text{pour } t < t_0. \quad (5.29)$$

Dans une expérience on soumet un système (une antenne) initialement au repos à un champ électromagnétique exciteur. Le quadripotentiel est alors donné par (5.28). La partie A_{in}^α décrit le champ électromagnétique exciteur d'après (5.29) et le quadripotentiel retardé décrit le rayonnement émis par l'antenne. Dans la suite, nous utiliserons uniquement le quadripotentiel retardé.

5.2.1 Courant stationnaire

Pour un quadricourant indépendant du temps, l'équation (5.27) donne

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{solution de l'équation de Poisson}), \quad (5.30)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{qui vérifie} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (5.31)$$

5.3 Charge ponctuelle en mouvement

5.3.1 Potentiels de Liénard-Wiechert

Nous voulons déterminer les champs créés par une charge ponctuelle q en mouvement de coordonnées $\xi^0 = ct$ et $\vec{\xi}(t)$.

Le quadricourant est donné par (1.55) et le quadripotentiel par (5.26)

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{r}, t) &= \mu_0 \int d^4x'' \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}''|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}''| - c(t - t'')) q \delta^{(3)}(\vec{r}'' - \vec{\xi}(t'')) \frac{d\xi^\mu(t'')}{dt''} \\ &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{d\xi^\mu(t'')}{dt''} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|} \delta\left(t'' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|}{c}\right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

La figure 5.2a représente l'espace-temps avec une dimension spatiale supprimée. La ligne d'univers de la charge ponctuelle (de masse $\neq 0$) coupe le cône de lumière passé de \mathcal{M} (point d'observation \vec{r}, t) en exactement un point, l'événement retardé \mathcal{R} , de coordonnées $t', \vec{\xi}(t')$. Le temps t' est appelé le *temps retardé*.

La figure 5.2b représente \mathcal{M} et \mathcal{R} dans l'espace tridimensionnel spatial. Le temps retardé est déterminé par l'équation

$$t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{\xi}(t')|}{c} = 0. \quad (5.33)$$

FIG. 5.2 – Temps retardé.

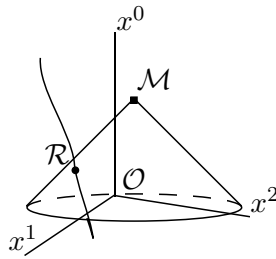


FIG. 5.2a – Dans l'espace-temps.

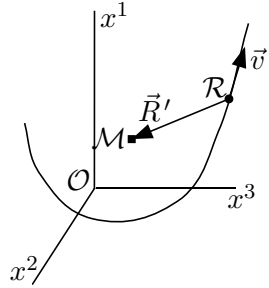


FIG. 5.2b – Dans l'espace ordinaire.

Revenons à l'équation (5.32). L'argument $f(t'') = t'' - t + |\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|/c$ de la fonction delta s'annule seulement pour t'' égal au temps retardé t' . Pour effectuer l'intégration sur t'' , on utilise l'équation (5.20) et on considère \vec{r} et t fixes :

$$\begin{aligned} \delta(f(t'')) &= \frac{\delta(t'' - t')}{\left| \frac{df(t'')}{dt''} \right|_{t''=t'}} \\ \frac{df(t'')}{dt''} &= 1 - \frac{d\vec{\xi}(t'')}{cdt''} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{\xi}(t'')}{|\vec{r} - \vec{\xi}(t'')|} \\ \frac{df(t'')}{dt''} \Big|_{t''=t'} &= 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}'. \end{aligned} \quad (5.34)$$

On a posé

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{R}'}{R'} \quad \text{où} \quad \vec{R}' = \vec{r} - \vec{\xi}(t') \quad \text{joint la position retardée } \mathcal{R} \text{ au point } \mathcal{M} \\ \vec{\beta}' &= \frac{\vec{v}'}{c} = \frac{d\vec{\xi}(t')}{cdt'} \quad (\vec{v}' \text{ est la vitesse au temps retardé}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

On obtient les *potentiels de Liénard³-Wiechert⁴* :

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\xi^\mu}{dt'}(t') \frac{q}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}')R'}, \quad (5.36)$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R' - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{v}'}{c}}}, \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}'}{R' - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{v}'}{c}}}. \quad (5.37)$$

On peut écrire une forme explicitement covariante de (5.36) en fonction de u'^μ (quadrivitesse au point retardé \mathcal{R}) et de $y^\mu = x^\mu - x'^\mu = (c(t - t'), \vec{R}')$ (quadrivecteur $\overrightarrow{\mathcal{RM}}$). Dans un référentiel comobile avec la particule au temps retardé, $y^\mu u'_\mu = c^2(t - t') = cR'$ et (5.36) se réduit à $A^0 = \mu_0 c q / 4\pi R'$, $A^i = 0$. On a alors l'écriture

$$\boxed{A^\alpha(x^\mu) = \frac{c\mu_0 q}{4\pi} \frac{u'^\alpha}{y^\beta u'_\beta}}, \quad (5.38)$$

qui est explicitement covariante.

5.3.2 Champs \vec{E} et \vec{B}

Les champs \vec{E} et \vec{B} peuvent s'obtenir par

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.39)$$

Le calcul est assez fastidieux parce que les équations (5.37) font intervenir le temps retardé qui doit être considéré comme une fonction implicite $t' = t'(\vec{r}, t)$ donnée par l'équation (5.33). On a besoin de $\partial_t t' = \frac{\partial t'(\vec{r}, t)}{\partial t}$ et de $\partial_i t'$. Différentiant $R' - ct + ct' = 0$ on a

$$\frac{\vec{R}' \cdot d\vec{R}'}{R'} - cdt + cdt' = \frac{\vec{R}' \cdot (d\vec{r} - \vec{v}' dt')}{R'} - cdt + cdt' = 0,$$

$$c \left(1 - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{v}'}{R'c} \right) dt' = cdt - \frac{\vec{R}' \cdot d\vec{r}}{R'}.$$

On utilise le calcul tensoriel tri-dimensionnel (métrique δ_{ij} , $R'_j = R'^j = x^j - \xi'^j(t')$).

$$\partial_t t' = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}{R'}}, \quad \partial_i t' = -\frac{R'_i}{cR' \left(1 - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}{R'} \right)}. \quad (5.40)$$

3. Alfred-Marie Liénard (1869-1958)

4. Emil Wiechert (1861-1928)

Pour simplifier, nous allons calculer \vec{E} et \vec{B} dans un *référentiel comobile* avec la particule au temps retardé. On a $\vec{\beta}' = 0$ mais en général l'accélération retardée $\vec{a}' = c\dot{\vec{\beta}}' \neq 0$. On a besoin de

$$\begin{aligned} \partial_t t' &= 1, & \partial_i t' &= -\frac{R'_i}{cR'}, & \partial_t R'_j &= 0, & \partial_i R'_j &= \delta_{ij}, & \partial_t \beta'_j &= \dot{\beta}'_j, \\ \partial_i \beta'_j &= -\frac{\dot{\beta}'_j R'_i}{cR'}, & \partial_t(\beta'_j R'_j) &= \dot{\beta}'_j R'_j, & \partial_i(\beta'_j R'_j) &= -\frac{\dot{\beta}'_j R'_j R'_i}{cR'}, \\ \partial_t R' &= 0, & \partial_i R' &= -c\partial_i t' = \frac{R'_i}{R'}, & \partial_t(R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}') &= -\dot{\vec{\beta}}' \cdot \vec{R}', \\ \partial_i(R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}') &= \frac{R'_i}{R'} \left(1 + \frac{\dot{\vec{\beta}}' \cdot \vec{R}'}{c} \right), \\ -\partial_i \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R'^2} \partial_i(R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}') = \frac{qR'_i}{4\pi\epsilon_0 R'^3} \left(1 + \frac{\dot{\vec{\beta}}' \cdot \vec{R}'}{c} \right), \\ \partial_t A_i &= \frac{\mu_0 q c}{4\pi R'} \partial_t \beta'_i = \frac{q\dot{\beta}'_i}{4\pi\epsilon_0 c R'}, \\ B_i &= e_{ijk} \partial_j A_k = e_{ijk} \frac{\mu_0 q c}{4\pi R'} \partial_j \beta'_k = -e_{ijk} \frac{\mu_0 q R'_j \dot{\beta}'_k}{4\pi R'^2}. \end{aligned}$$

D'où les champs \vec{E} et \vec{B} dans un **référentiel comobile** 5 ($\vec{\beta}' = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{R}'}{R'^3} + \frac{1}{cR'} [(\dot{\vec{\beta}}' \cdot \vec{n}) \vec{n} - \dot{\vec{\beta}}'] \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n}}{R'^2} + \frac{1}{cR'} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}}') \right], \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi R'} \vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}}' = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}. \quad (5.42)$$

Le champ est la somme du champ coulombien en R'^{-2} d'une particule immobile

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n}}{R'^2}, \quad \vec{B} = 0 \quad (5.43)$$

et, si l'accélération retardée \vec{a}' n'est pas nulle, du *champ de rayonnement* en R'^{-1}

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi R'} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a}'), \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}. \quad (5.44)$$

5. On a dans un référentiel quelconque, avec $\gamma'^{-2} = 1 - \vec{\beta}'^2$,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{n})^3} \left[\frac{\vec{n} - \vec{\beta}'}{\gamma'^2 R'^2} + \frac{1}{cR'} \vec{n} \wedge ([\vec{n} - \vec{\beta}'] \wedge \dot{\vec{\beta}}') \right], \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E}.$$

5.3.3 Formule de Larmor

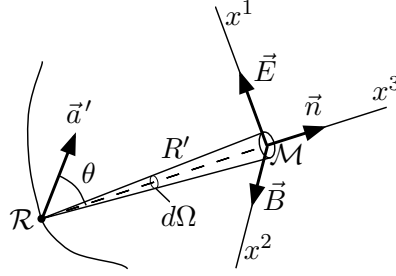


FIG. 5.3 – Champ de rayonnement.

On considère un référentiel d'inertie $K = \mathcal{M}x^0x^1x^2x^3$ (cf. figure 5.3) défini par : \mathcal{M} est le point d'observation ; le référentiel K est comobile avec la particule à l'instant retardé ; \vec{n} est suivant $\mathcal{M}x^3$; l'accélération retardée \vec{a}' est dans le plan $\mathcal{M}x^1x^3$ et fait l'angle θ avec \vec{n} . Pour les champs de rayonnement, on a

$$\vec{E} \parallel \mathcal{M}x^1, \quad \vec{B} \parallel \mathcal{M}x^2 \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{c}. \quad (5.45)$$

Le tenseur énergie-impulsion du champ $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ (3.63) s'écrit au point \mathcal{M} dans le référentiel comobile K :

$$T_{\text{champ}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & u \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{R'^3}\right) \quad (5.46)$$

où

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi R'}\right)^2 a'^2 \sin^2 \theta. \quad (5.47)$$

On a utilisé les champs de rayonnement (5.44) en négligeant, dans la limite $R' \rightarrow \infty$, le champ coulombien (5.43) ainsi que les autres champs du système qui créent le mouvement de la particule. Soit $W_{\mathcal{B}}$ l'énergie et $\vec{P}_{\mathcal{B}}$ la quantité de mouvement de la boule de rayon R' centrée sur la position retardée \mathcal{R} de la particule correspondant à l'événement \mathcal{M} . Remarquant que la position retardée \mathcal{R} reste la même pour tous les points, pris au même instant dans K , de la sphère de rayon R' centrée en \mathcal{R} , on a, d'après (3.74) et (3.75)

$$\frac{dW_{\mathcal{B}}}{dt} = - \int d\Omega \left(\frac{dP}{d\Omega}\right) \quad (5.48)$$

$$\frac{d\vec{P}_{\mathcal{B}}}{dt} = - \int d\Omega R'^2 u \vec{n} = - \int d\Omega \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4} \vec{n} = 0 \quad (5.49)$$

où

$$\frac{dP}{d\Omega} = (\vec{S} \cdot \vec{n}) R'^2 = cu R'^2 = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{4\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{4\pi}. \quad (5.50)$$

L'interprétation de (5.48) est que la particule rayonne une puissance par unité d'angle solide

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a'^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{4\pi}}. \quad (5.51)$$

Les champs au point \mathcal{M} correspondent localement à une onde se propageant suivant \vec{n} et polarisée dans le plan contenant \mathcal{M} et l'accélération retardée \vec{a}' . Une particule en mouvement uniforme ne rayonne pas ($\vec{a}' = 0$). En intégrant (5.48) sur les angles solides, on obtient la puissance rayonnée

$$\boxed{P = \int d\Omega \left(\frac{dP}{d\Omega} \right) = \frac{2}{3} \frac{q^2 a'^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}} \quad (\text{formule de Larmor}^6). \quad (5.52)$$

Désignons par m la masse, p'^μ la quadriimpulsion et τ' le temps propre de la particule au moment retardé. Dans le référentiel comobile $\frac{dp'^\mu}{d\tau'} = (0, m\vec{a}')$. On peut donc écrire la formule de Larmor sous la forme

$$\boxed{P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \frac{dp'^\mu}{d\tau'} \frac{dp'_\mu}{d\tau'}} \quad (\text{généralisation relativiste}). \quad (5.53)$$

Nous allons étendre la validité de cette formule (qui n'a été démontrée que dans le référentiel comobile K). Dans un référentiel quelconque K_1 , nous définissons la puissance rayonnée par la limite quand $R' \rightarrow \infty$

$$P' = \lim_{R' \rightarrow \infty} -\frac{dW_{\mathcal{B}}}{dt'} \quad (5.54)$$

où $dW_{\mathcal{B}}$ est la variation d'énergie dans K_1 de la boule \mathcal{B} (la même que plus haut : \mathcal{B} est une boule dans K) pendant l'intervalle de temps retardé dt' (mesuré dans K_1). Avec cette définition, l'énergie rayonnée totale mesurée dans K_1 est donnée par

$$W_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{\infty} P' dt' \quad (5.55)$$

qui est commode parce que P' s'écrit en fonction du temps retardé t' . Dans le référentiel comobile K , $dt' = d\tau'$ et $P = P'$. Toujours dans le référentiel comobile K , les équations (5.48) et (5.49) montrent que le quadrivecteur $\frac{dp_{\mathcal{B}}^\mu}{d\tau'} = \left(\frac{dW_{\mathcal{B}}}{cd\tau'}, \frac{d\vec{P}_{\mathcal{B}}}{d\tau'} \right)$ s'écrit $\left(-\frac{P}{c}, \vec{0} \right)$, soit

$$\frac{dp_{\mathcal{B}}^\mu}{d\tau'} = -\frac{P}{c^2} \frac{d\xi'^\mu}{d\tau'}. \quad (5.56)$$

L'expression (5.56) doit être covariante : cela implique que P est un scalaire. Dans le référentiel K_1 , en utilisant la composante temporelle de (5.56), on a

6. Sir Joseph Larmor (1857-1942)

$-\frac{dW_{\mathcal{B}}}{dt'} = -c \frac{dp_{\mathcal{B}}^0}{d\tau'} \frac{d\tau'}{dt'} = P \frac{d\xi'^0}{d\tau'} \frac{d\tau'}{cdt'} = P$. La définition (5.54) donne $P' = P$ et la formule (5.53) est la puissance rayonnée dans un référentiel quelconque. Dans un référentiel où la particule est non relativiste on peut utiliser la formule de Larmor (5.52), l'accélération retardée \vec{a}' ayant la même valeur que dans le référentiel comobile.

5.4 Distribution de charges quelconque

5.4.1 Décomposition spectrale des potentiels

On fait une analyse de Fourier temporelle. On écrit pour le quadricourant $j^\mu = (\rho c, \vec{J})$

$$j^\mu(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega j_\omega^\mu(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (5.57)$$

et, inversement,

$$j_\omega^\mu(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt j^\mu(\vec{r}, t) e^{i\omega t}. \quad (5.58)$$

Comme $j^\mu(\vec{r}, t)$ est réel, on a $j_\omega^{\mu*}(\vec{r}) = j_{-\omega}^\mu(\vec{r})$. Les autres champs sont décomposés de façon analogue. Portons (5.57) dans le quadripotential retardé (5.27)

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega j_\omega^\mu(\vec{r}') e^{-i\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_\omega^\mu(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (5.59)$$

où

$$A_\omega^\mu(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{i\omega|\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} j_\omega^\mu(\vec{r}'). \quad (5.60)$$

En posant $\boxed{\omega = ck}$ on a :

$$\phi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_\omega(\vec{r}'), \quad (5.61)$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}_\omega(\vec{r}'). \quad (5.62)$$

5.4.2 Décomposition spectrale de \vec{E} et \vec{B}

On a

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (5.63)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{B}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (5.64)$$

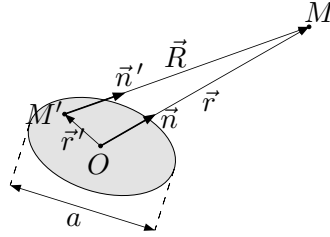
avec (on utilise $\vec{\nabla} \wedge f\vec{V} = (\vec{\nabla}f) \wedge \vec{V} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{V})$)

$$\begin{aligned} \vec{E}_\omega(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi_\omega(\vec{r}) + i\omega\vec{A}_\omega(\vec{r}) \\ &= i\omega\vec{A}_\omega(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho_\omega(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \left[\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right], \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{\nabla}_r \left[\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \wedge \vec{J}_\omega(\vec{r}'). \quad (5.66)$$

5.4.3 Zone de rayonnement

FIG. 5.4 – Zone de rayonnement (ou zone radiative).



Les sources sont localisées dans une région de dimensions a autour de O (cf. figure 5.4). On observe les champs au point M à la distance r de O ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$). On s'intéresse au rayonnement de fréquence $\nu = c/\lambda$. On se place dans des conditions telles que

$$\boxed{R \gg \lambda} \quad \text{et} \quad \boxed{R \gg a} \quad (\text{zone de rayonnement}). \quad (5.67)$$

Les expressions (5.65) et (5.66) contiennent, avec $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (cf. figure 5.4),

$$\vec{\nabla}_r \left[\frac{e^{ikR}}{R} \right] = \left[\underbrace{ik \frac{e^{ikR}}{R}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{e^{ikR}}{R^2}}_{\beta} \right] \vec{\nabla}_r R \quad (5.68)$$

On s'intéresse au rayonnement de la source, lorsque le terme β en R^{-2} est petit devant le terme α en R^{-1} . On suppose donc que $kR \gg 1$ ou, de façon équivalente, $R \gg \lambda$. On suppose de plus que les dimensions de la source sont petites devant la distance r , mais on ne fait pas pour le moment d'hypothèse sur les grandeurs respectives de λ et a . On a alors (on pose $\vec{n}' = \vec{R}/R$ et $\vec{n} = \vec{r}/r$)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r \left[\frac{e^{ikR}}{R} \right] &\approx ik \frac{e^{ikR}}{R} \vec{\nabla}_r R = ik \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}' && [\text{d'après } R \gg \lambda] \\ &\approx ik \vec{n} \frac{e^{ikR}}{R} = i\vec{k} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \right] && [\text{d'après } R \gg a] \end{aligned} \quad (5.69)$$

en posant $\vec{k} = k\vec{n}$. On peut donc faire l'approximation $\vec{\nabla}_r \approx i\vec{k}$ dans la zone de rayonnement. En pratique, on transcrit les équations entre champs spatiaux-temporels $\vec{E}(\vec{r}, t)$, etc. en équations entre composantes spectrales $\vec{E}_\omega(\vec{r})$, etc. par les règles

$$\boxed{\vec{\nabla}_r \longrightarrow i\vec{k}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega}. \quad (5.70)$$

Ainsi, les équations (5.65) et (5.66) dans la zone de rayonnement

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = -i\vec{k}\phi_\omega(\vec{r}) + i\omega\vec{A}_\omega(\vec{r}) \quad \text{et} \quad \vec{B}_\omega(\vec{r}) = i\vec{k} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) \quad (5.71)$$

transcrivent les équations (1.10).

La condition de Lorenz (1.12) se transcrit en

$$i\vec{k} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}) - \frac{i\omega}{c^2}\phi_\omega(\vec{r}) = 0. \quad (5.72)$$

Elle permet d'exprimer $\phi_\omega(\vec{r})$ en fonction de $\vec{A}_\omega(\vec{r})$:

$$\phi_\omega(\vec{r}) = c\vec{n} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}). \quad (5.73)$$

On en déduit, d'après (5.71), que $\vec{E}_\omega(\vec{r}) = i\omega \left[\vec{A}_\omega(\vec{r}) - (\vec{n} \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r})) \vec{n} \right]$ soit

$$\boxed{\vec{B}_\omega(\vec{r}) = i\vec{k} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) \quad \text{et} \quad \vec{E}_\omega(\vec{r}) = c\vec{B}_\omega(\vec{r}) \wedge \vec{n}.} \quad (5.74)$$

Cette dernière relation transcrit d'ailleurs l'équation de Maxwell (1.2) dans le vide. Les vecteurs $(\vec{E}_\omega(\vec{r}), \vec{B}_\omega(\vec{r}), \vec{n})$ forment donc un trièdre direct et $\vec{E}_\omega = c\vec{B}_\omega$ comme dans une onde plane. La direction de \vec{E}_ω est la direction orthogonale à \vec{n} dans le plan $(\vec{n}, \vec{A}_\omega(\vec{r}))$.

5.4.4 Composante $\vec{A}_\omega(\vec{r})$

On peut encore simplifier l'équation (5.62) en faisant l'approximation (on utilise $R \gg a$)

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{ik(r-\vec{r}' \cdot \vec{n})}}{r} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'}. \quad (5.75)$$

On obtient

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \vec{J}_\omega(\vec{r}').} \quad (5.76)$$

Cas $a \gtrsim \lambda$

On peut préciser, lorsque $a \gtrsim \lambda$, la condition $R \gg a$ de la façon suivante. Le développement limité

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \vec{r}' \cdot \vec{n} + \frac{r'^2 - (\vec{r}' \cdot \vec{n})^2}{2r} + O\left(\frac{r'^3}{r^2}\right) \quad (5.77)$$

montre que l'on a négligé dans (5.75) un terme de phase de l'ordre de $k \frac{r'^2 - (\vec{r}' \cdot \vec{n})^2}{2r} \sim \frac{ka^2}{8R}$, pour O au centre de la source. On considère généralement que ce terme est négligeable devant le terme de phase $k\vec{r}' \cdot \vec{n}$, qui varie de l'ordre de $ka \gtrsim 2\pi$, s'il reste inférieur à $2\pi/16$. La condition $R \gg a$ est ainsi précisée en $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a^2}{8R} \lesssim \frac{2\pi}{16}$, soit

$$R \gtrsim R_f \quad \text{où} \quad R_f = \frac{2a^2}{\lambda} \quad (5.78)$$

est la *distance de Fraunhofer*⁷.

5.4.5 Energie rayonnée

Considérons le cas d'une oscillation limitée dans le temps qui donne lieu à un spectre continu de fréquences. Le vecteur de Poynting est

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{c\vec{n}}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \\ &= \frac{c\vec{n}}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{\omega'}(\vec{r}) e^{-i(\omega+\omega')t}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

L'énergie totale rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$ est

$$\begin{aligned} dW &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot (\vec{n} r^2 d\Omega) \\ &= \frac{cr^2 d\Omega}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{\omega'}(\vec{r}) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega+\omega')t}}_{2\pi\delta(\omega+\omega')} \\ &= \frac{2\pi cr^2 d\Omega}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{-\omega}(\vec{r}) = \frac{2\pi cr^2 d\Omega}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{B}_\omega(\vec{r}) \cdot \vec{B}_\omega^*(\vec{r}) \end{aligned}$$

en utilisant que $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est réel ($B_\omega^*(\vec{r}) = B_{-\omega}(\vec{r})$). Posons

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{4\pi c}{\mu_0} r^2 |\vec{B}_\omega(\vec{r})|^2} \quad (5.80)$$

7. Josef von Fraunhofer (1787-1826)

(énergie par angle solide et élément spectral $\omega > 0$). On a (noter qu'on intègre sur les fréquences positives seulement)

$$\boxed{\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^\infty d\omega \frac{\partial^2 W}{\partial\Omega\partial\omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{W = \int d\Omega \left(\frac{dW}{d\Omega} \right)} \quad (5.81)$$

pour l'énergie totale rayonnée.

En résumé, on obtiendra l'énergie totale rayonnée (5.81), sa distribution angulaire (5.81) et ses éléments spectraux (5.80), qui bien sûr ne dépendent pas de r , à partir de la densité de courant $\vec{J}(\vec{r}, t)$ par les étapes suivantes : calcul des composantes $\vec{J}_\omega(\vec{r})$ par (5.58), $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ par (5.76) et de $\vec{B}_\omega(\vec{r})$ par (5.74).

5.4.6 Sources périodiques de période T

Pour un système de sources périodiques, les décompositions spectrales sont des séries de Fourier. On écrit par exemple ($\omega_0 T = 2\pi$)

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{J}_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t}, \quad (5.82)$$

$$\vec{J}_n(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{J}(\vec{r}, t) e^{in\omega_0 t}. \quad (5.83)$$

Les relations linéaires (5.74) et (5.76) établies pour les composantes spectrales ω restent valables pour les composantes spectrales n en posant $\omega = n\omega_0$. Le vecteur de Poynting est

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c\vec{n}}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \frac{c\vec{n}}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_m(\vec{r}) e^{-i(n+m)\omega_0 t}. \quad (5.84)$$

On s'intéresse souvent à des moyennes temporelles. La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est

$$\begin{aligned} \vec{S}_{\text{moy}}(\vec{r}) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{S}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{c\vec{n}}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_m(\vec{r}) \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-i(n+m)\omega_0 t} \\ &= \frac{c\vec{n}}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_m(\vec{r}) \delta_{n, -m} \\ &= \frac{c\vec{n}}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{B}_n(\vec{r}) \cdot \vec{B}_{-n}(\vec{r}) = \frac{2c\vec{n}}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \vec{B}_n(\vec{r}) \right|^2 \end{aligned}$$

car la composante $\vec{B}_n(\vec{r})$ pour $n = 0$ est nulle d'après (5.74) ($\vec{k} = 0$ pour $n = 0$). La puissance moyenne rayonnée par angle solide est

$$\boxed{\frac{dP_{\text{moy}}}{d\Omega} = r^2 \vec{S}_{\text{moy}}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \frac{2c}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} r^2 |\vec{B}_n(\vec{r})|^2.} \quad (5.85)$$

5.4.7 Approximation dipolaire électrique

Nous considérons une distribution de charges qui est de petite dimension comparée à la longueur d'onde λ (on s'intéresse aux composantes spectrales des champs pour une pulsation ω donnée). En plus des conditions (5.67) (zone de rayonnement) nous faisons donc l'hypothèse

$$\boxed{a \ll \lambda.} \quad (5.86)$$

On peut interpréter cette condition lorsque les charges ont un mouvement périodique de période T . Leur vitesse est alors de l'ordre de

$$v \sim \frac{a}{T} = \frac{a}{\lambda} c \quad \text{et donc} \quad \boxed{v \ll c,} \quad (5.87)$$

c'est à dire que le mouvement des charges est **non relativiste**.

On peut aussi écrire la condition $a \ll \lambda$ sous la forme $\boxed{ka \ll 1}$. Dans l'expression (5.76), on peut donc effectuer un développement en série de $e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}'}$ ($|k\vec{n}\cdot\vec{r}'| < ka \ll 1$). On obtient

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-ik)^p}{p!} \int d^3x' (\vec{n}\cdot\vec{r}')^p \vec{J}_\omega(\vec{r}'). \quad (5.88)$$

Le p -ième terme est de l'ordre de $\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{(ka)^p}{p!} J a^3$ en notant par J l'ordre de grandeur du courant. Il est clair que pour $ka \ll 1$ les termes successifs du développement (5.88) décroissent rapidement.

L'*approximation dipolaire électrique* consiste à ne garder que le premier terme du développement (5.88) :

$$e^{-ik\vec{k}\cdot\vec{r}'} \approx 1, \quad \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \vec{J}_\omega(\vec{r}'). \quad (5.89)$$

Oscillation limitée dans le temps

Pour une oscillation limitée dans le temps portons dans cette expression le courant \vec{J} d'un système de N particules (la particule a de charge q_a est

située en $\vec{\xi}_a(t)$ et se déplace à la vitesse $\vec{V}_a(t)$ à l'instant t :

$$\begin{aligned}
\vec{J}(\vec{r}, t) &= \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t)) \\
\vec{J}_\omega(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{J}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} \\
\vec{A}_\omega(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int d^3x' \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{\xi}_a(t)) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t). \tag{5.90}
\end{aligned}$$

Il apparaît la dérivée du moment dipolaire électrique

$$\vec{d} = \sum_{a=1}^N q_a \vec{\xi}_a(t), \quad \dot{\vec{d}} = \sum_{a=1}^N q_a \vec{V}_a(t). \tag{5.91}$$

On a

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \dot{\vec{d}} \tag{5.92}$$

soit

$$\boxed{\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\dot{\vec{d}} \right]_\omega.} \tag{5.93}$$

Le champ \vec{B}_ω s'écrit en fonction de $\left[\ddot{\vec{d}} \right]_\omega = -i\omega \left[\dot{\vec{d}} \right]_\omega$:

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = ik\vec{n} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{n} \wedge \left[\ddot{\vec{d}} \right]_\omega. \tag{5.94}$$

L'énergie par angle solide et élément spectral, équation (5.80), est

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \left| \vec{n} \wedge \left[\ddot{\vec{d}} \right]_\omega \right|^2 \tag{5.95}$$

ou, en introduisant l'angle θ entre \vec{n} et $\left[\ddot{\vec{d}} \right]_\omega$,

$$\boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \left| \left[\ddot{\vec{d}} \right]_\omega \right|^2} \tag{5.96}$$

Système oscillant

Pour un système oscillant à la seule pulsation ω_0 , on pose (en suivant la notation de (5.82))

$$\vec{d} = \vec{d}_1 e^{-i\omega_0 t} + \vec{d}_1^* e^{i\omega_0 t} = 2\text{Re} \left[\vec{d}_1 e^{-i\omega_0 t} \right]. \tag{5.97}$$

Un calcul analogue aux équations (5.90) à (5.93) conduit maintenant à

$$\boxed{\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\dot{\vec{d}} \right]_1} \quad (5.98)$$

et la puissance moyenne rayonnée par angle solide est donnée par l'équation (5.85), la somme se limitant au terme $n = 1$,

$$\frac{dP_{\text{moy}}}{d\Omega} = \frac{2c}{\mu_0} r^2 \left| \vec{B}_1(\vec{r}) \right|^2 = \frac{\mu_0}{8\pi^2 c} \left| \vec{n} \wedge \left[\ddot{\vec{d}} \right]_1 \right|^2, \quad (5.99)$$

soit

$$\boxed{\frac{dP_{\text{moy}}}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \left| \left[\ddot{\vec{d}} \right]_1 \right|^2} \quad (5.100)$$

avec $\left[\ddot{\vec{d}} \right]_1 = -i\omega_0 \left[\dot{\vec{d}} \right]_1 = -\omega_0^2 \vec{d}_1$. La distribution du rayonnement en fonction de la direction est donnée par le facteur $\boxed{\sin^2 \theta}$.

6

Intégrales de chemin

6.1 Introduction

Dans les formulations initiales de la Mécanique Quantique, dues à Schrödinger et Heisenberg, la fonction d'onde (notée $\psi(\vec{r}, t)$ pour une particule) est l'objet de base étudié. Au lieu de la fonction d'onde, on peut prendre pour objet de base le propagateur noté $K(a, b)$ ou $K(\vec{r}_a, t_a, \vec{r}_b, t_b)$ ($a = (\vec{r}_a, t_a)$, $b = (\vec{r}_b, t_b)$). Le propagateur $K(a, b)$ représente l'*amplitude de probabilité* de trouver la particule en \vec{r}_a à l'instant t_a si elle se trouvait localisée en \vec{r}_b à l'instant t_b ($t_a \geq t_b$).

Feynman a découvert que le propagateur s'exprime comme une intégrale sur tous les chemins $q(t)$ allant du point b au point a de l'espace temps :

$$K(a, b) = \int_b^a \mathcal{D}q e^{iS[q]/\hbar} \quad (6.1)$$

où $S[q]$ est l'action classique de la particule le long du chemin q . La signification de la notation de l'intégrale de chemin $\int_b^a \mathcal{D}q$ sera expliquée plus loin. L'expression (6.1) permet de donner une troisième formulation de la Mécanique Quantique, équivalente aux formulations de Schrödinger et Heisenberg. Par suite de ses très nombreux avantages cette formulation en intégrales de chemin est considérée comme étant l'approche « moderne » de la Mécanique Quantique. Toutefois l'intégrale (6.1) est très difficile à calculer et l'approche de Schrödinger garde toute sa valeur pour des systèmes simples (par exemple l'atome d'hydrogène).

Dans ce chapitre, nous allons déduire l'équation (6.1) du formalisme habituel. Pour simplifier on se limitera à une particule non relativiste et à une dimension (\vec{r} est remplacé par x).

6.2 Propagateur

6.2.1 Définition

On considère un hamiltonien

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t) \quad (6.2)$$

décrivant une particule quantique non relativiste de masse m à une dimension. Le potentiel $V(x, t)$ peut dépendre du temps t . Les notations \hat{x} , \hat{p} servent à distinguer les opérateurs des simples nombres x , p . L'opérateur d'évolution $U(t_a, t_b)$ permet d'obtenir la fonction d'onde dans le point de vue de Schrödinger $\psi(x, t_a)$ à l'instant t_a en fonction de la fonction d'onde $\psi(x, t_b)$ à l'instant t_b :

$$\psi(x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x_a | U(t_a, t_b) | x_b \rangle \psi(x_b, t_b) dx_b \quad (6.3)$$

(cf. équation (4.8)). On définit le propagateur par

$$K(a, b) = K(x_a, t_a, x_b, t_b) = \begin{cases} \langle x_a | U(t_a, t_b) | x_b \rangle & \text{si } t_a \geq t_b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.4)$$

Mathématiquement, le propagateur est un noyau intégral :

$$\psi(x_a, t_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(a, b) \psi(x_b, t_b) dx_b \quad (t_a \geq t_b). \quad (6.5)$$

Si la particule est localisée en x_b à l'instant t_b , sa fonction d'onde est $\psi(x, t_b) = \delta(x - x_b)$ et l'équation (6.5) donne $\psi(x_a, t_a) = K(x_a, t_a, x_b, t_b)$. D'après l'interprétation de la fonction d'onde, le propagateur $K(a, b)$ représente donc l'amplitude de probabilité de trouver la particule en x_a à l'instant t_a si elle se trouvait localisée en x_b à l'instant t_b ($t_a \geq t_b$). Plus brièvement on dira que $K(a, b)$ est l'amplitude de probabilité de la particule pour aller de b à a ($t_a \geq t_b$).

L'équation (6.5) s'exprime en termes physiques : l'amplitude de probabilité pour que la particule arrive en a est la somme sur toutes les valeurs de x_b de l'amplitude de probabilité que la particule se trouve en b ($\psi(x_b, t_b)$) multipliée par l'amplitude de probabilité qu'elle a d'aller de b à a ($K(a, b)$).

6.2.2 Équation différentielle

Nous utiliserons les équations (4.9) que nous récrivons

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \langle x | U(t, t') | x' \rangle = 0 \quad (6.6)$$

(l'opérateur H agit sur la coordonnée x) et

$$U(t, t) = \mathbf{1} \quad \text{soit} \quad \langle x|U(t, t)|x' \rangle = \delta(x - x'). \quad (6.7)$$

On en déduit, avec la définition (6.4), que si t tend vers t' par valeurs supérieures on a :

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} K(x, t, x', t') = \delta(x - x'). \quad (6.8)$$

Pour obtenir une équation différentielle récrivons (6.4) sous la forme

$$K(x, t, x', t') = \langle x|U(t, t')|x' \rangle \theta(t - t') \quad (6.9)$$

où $\theta(u)$ est la fonction de Heaviside (5.19). En appliquant $(i\hbar\partial/\partial t - H)$ à cette équation il vient :

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right) K(x, t, x', t') &= \langle x|U(t, t')|x' \rangle i\hbar\frac{\partial\theta(t - t')}{\partial t} \\ &= i\hbar\langle x|U(t, t')|x' \rangle \delta(t - t') \end{aligned} \quad (6.10)$$

soit

$$\boxed{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right) K(x, t, x', t') = i\hbar\delta(x - x')\delta(t - t').} \quad (6.11)$$

C'est une équation différentielle inhomogène en x et t avec une source localisée en (x', t') . Par analogie avec la section 5.1, le propagateur $K(x, t, x', t')$ est aussi appelé fonction de Green (avancée).

6.3 Propagateur libre

6.3.1 Calcul

On considère une particule libre de masse m à une dimension d'hamiltonien

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}. \quad (6.12)$$

L'hamiltonien est indépendant du temps. On a (cf. équation (4.11))

$$U(t, t') = U(t - t', 0) = e^{-i\hat{p}^2(t-t')/2\hbar m}. \quad (6.13)$$

Le système est aussi invariant dans les translations en x . Il en résulte que le propagateur ne dépend que de $x - x'$ et $t - t'$:

$$K_0(x, t, x', t') = K_0(x - x', t - t', 0, 0). \quad (6.14)$$

Introduisons les vecteurs propres $|p\rangle$ de \hat{p} :

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}, \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (6.15)$$

Leur normalisation est donnée par

$$\langle p|p'\rangle = \langle p|\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x|\right)}_{\mathbf{1}}|p'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(p'-p)x/\hbar} dx = 2\pi\hbar\delta(p-p') \quad (6.16)$$

et la relation de fermeture par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle\langle p| = \mathbf{1}. \quad (6.17)$$

Calculons

$$\begin{aligned} \langle x|U(t,0)|x'=0\rangle &= \langle x|e^{-i\hat{p}^2 t/2\hbar m} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p\rangle\langle p|\right) |x'=0\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ipx/\hbar} e^{-itp^2/2\hbar m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{it}{2\hbar m}(p^2 - 2p\frac{mx}{t})} \\ &= \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{it}{2\hbar m}\left(p - \frac{mx}{t}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

où la dernière expression s'obtient en complétant le carré dans l'exponentielle. Il apparaît une intégrale gaussienne de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-au^2}$ qui vaut $\sqrt{\pi/a}$ pour $a > 0$. L'intégrale est aussi définie par continuation analytique pour $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, $|\theta| \leq \pi/2$. Nous écrirons (convention pour \sqrt{a})

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-au^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} e^{-i\theta/2}. \quad (6.19)$$

On peut terminer le calcul (6.18) :

$$\langle x|U(t,0)|x'=0\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{it}} \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right). \quad (6.20)$$

D'où l'expression du propagateur libre

$$\boxed{K_0(x, t, x', t') = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar(t-t')}} \exp\left(\frac{im(x-x')^2}{2\hbar(t-t')}\right) \theta(t-t').} \quad (6.21)$$

6.3.2 Discussion physique

Le propagateur

$$K_0(x, t, 0, 0) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar t}} \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \theta(t) \quad (6.22)$$

représente l'amplitude de probabilité que la particule arrive en $a = (x, t)$ (à l'instant $t \geq 0$) si elle était initialement localisée à l'origine $b = (0, 0)$ ($x' = 0$ à l'instant $t' = 0$). La probabilité $P(x)dx$ de trouver la particule entre x et $x + dx$ à l'instant t est donnée par :

$$P(x)dx = |K_0(x, t, 0, 0)|^2 dx = \frac{m dx}{2\pi\hbar t}. \quad (6.23)$$

C'est une probabilité relative puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx$ diverge. De façon classique (cf. figure 6.1), la particule qui arrive en $a = (x, t)$ a une quantité de mouvement

$$p = \frac{mx}{t}. \quad (6.24)$$

La probabilité (6.23) s'écrit

$$P(x)dx = \frac{dp}{2\pi\hbar} \quad (6.25)$$

et correspond donc au fait que toutes les quantités de mouvement de la particule sont équiprobables. C'est en accord avec le principe d'incertitude pour une particule libre initialement localisée en $b = (0, 0)$.

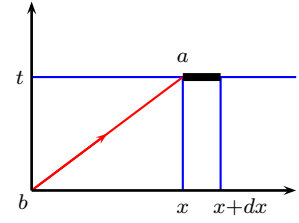


FIG. 6.1 – Trajectoire classique d'une particule initialement en $b = (0, 0)$.

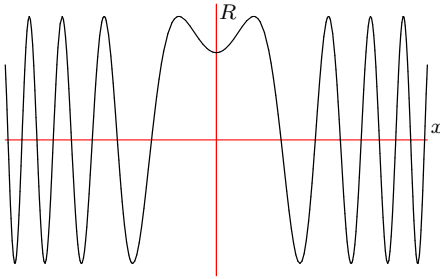


FIG. 6.2.

La partie réelle

$$R(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} \cos\left(\frac{mx^2}{2\hbar t} - \frac{\pi}{4}\right) \theta(t) \quad (6.26)$$

du propagateur (6.22) est représentée sur la figure 6.2 en fonction de x pour $t > 0$ donné et sur la figure 6.3 en fonction de t pour x donné.

Pour t fixé et x variable assez grand, le propagateur correspond à une onde quasi-sinusoidale de longueur d'onde λ . On détermine λ ($\lambda \ll x$) en écrivant

$$\frac{m(x + \lambda)^2}{2\hbar t} - \frac{mx^2}{2\hbar t} = 2\pi. \quad (6.27)$$

D'où $mx\lambda/\hbar t \approx 2\pi$ et

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{mx}{t}. \quad (6.28)$$

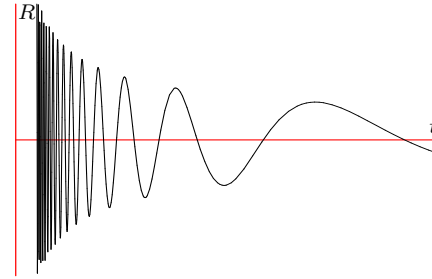


FIG. 6.3.

FIG. 6.2 – Le propagateur en fonction de x pour t fixé. On a représenté sa partie réelle $R(x, t)$; sa partie imaginaire est une courbe analogue telle que le module du propagateur est constant.

FIG. 6.3 – La partie réelle du propagateur en fonction de t pour x fixé.

C'est la formule de de Broglie¹ reliant la longueur d'onde et la quantité de mouvement d'une particule.

Pour x fixé et t variable assez grand, le propagateur correspond à une vibration quasi-sinusoïdale si on néglige les variations du facteur en $1/\sqrt{t}$. On détermine la période T correspondante ($T \ll t$) en écrivant

$$\frac{mx^2}{2\hbar(t-T)} - \frac{mx^2}{2\hbar t} = 2\pi \quad (6.29)$$

soit $\frac{mx^2 T}{2\hbar t(t-T)} = 2\pi$ et $T \approx \frac{4\pi\hbar t^2}{mx^2}$. On a donc, en introduisant l'énergie E de la particule,

$$T = \frac{h}{E} \quad \text{avec} \quad E = \frac{mx^2}{2t^2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.30)$$

On retrouve la relation $E = \hbar\omega$ entre l'énergie et la pulsation $\omega = 2\pi/T$.

6.4 Loi de composition

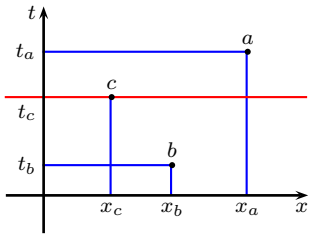


FIG. 6.4 – Loi de composition.

La loi de composition (4.10) de l'opérateur d'évolution $U(t, t')$ implique la loi pour le propagateur

$$K(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(a, c)K(c, b) dx_c \quad (t_a \geq t_c \geq t_b). \quad (6.31)$$

Le produit $K(a, c)K(c, b)$ représente l'amplitude de probabilité de la particule pour aller de b à $c = (x_c, t_c)$, puis de c à a (règle du produit des amplitudes de probabilité pour des événements en succession). L'équation (6.31) s'énonce: l'amplitude de probabilité de la particule pour aller de b à a est l'intégrale sur toutes les valeurs de x_c de l'amplitude de probabilité pour aller de b à c , puis de c à a .

Il est possible de réitérer la loi de composition (6.31):

$$K(a, b) = \int_{x_1} \int_{x_2} K(a, 2)K(2, 1)K(1, b) dx_1 dx_2 \quad (t_a \geq t_2 \geq t_1 \geq t_b). \quad (6.32)$$

Le terme $K(a, 2)K(2, 1)K(1, b)$ se lit de droite à gauche; c'est l'amplitude de probabilité de la particule pour aller de b à 1, puis de 1 à 2, puis de 2 à a .

On peut poursuivre le processus de sorte que l'intervalle de temps est divisé en N intervalles infinitésimaux ϵ ($t_a - t_b = N\epsilon$) (cf. figure 6.5). Posons

$$t_0 = t_b, \quad t_1 = t_0 + \epsilon, \quad t_2 = t_0 + 2\epsilon, \quad \dots, \\ t_n = t_0 + n\epsilon, \quad \dots, \quad t_N = t_0 + N\epsilon = t_a. \quad (6.33)$$

1. Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987)

Le propagateur $K(a, b)$ se décompose en introduisant les $N - 1$ événements intermédiaires $1, 2, \dots, N - 1$:

$$K(a, b) = \int_{x_1} \int_{x_2} \cdots \int_{x_n} \cdots \int_{x_{N-1}} K(a, N-1)K(N-1, N-2) \cdots K(n+1, n) \cdots \times K(2, 1)K(1, b) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \cdots dx_{N-1} \quad (6.34)$$

avec

$$t_a \geq t_{N-1} \geq \cdots \geq t_{n+1} \geq t_n \geq \cdots \geq t_2 \geq t_1 \geq t_b. \quad (6.35)$$

Le produit

$$\phi_N = K(a, N-1) \cdots K(n+1, n) \cdots K(1, b) = \prod_{n=0}^{N-1} K(n+1, n) \quad (6.36)$$

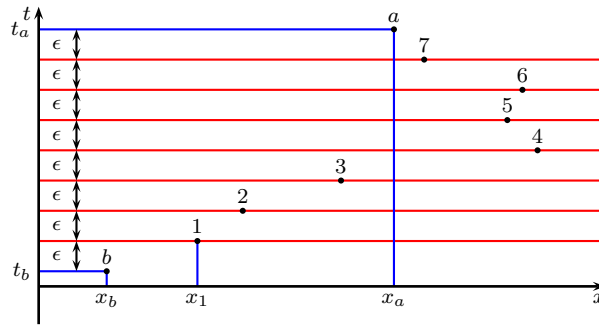


FIG. 6.5 – Rétération de la loi de composition pour des intervalles égaux.

est l'amplitude de probabilité de la particule pour aller de b à 1 , puis de 1 à 2 , \dots puis de n à $n+1$, \dots puis de $N-1$ à a . Le propagateur $K(a, b)$ s'obtient en intégrant ϕ_N sur les $N - 1$ coordonnées intermédiaires. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, le produit ϕ_N devient l'amplitude pour que la particule suive un chemin donné allant de a à b et les intégrales sur les coordonnées intermédiaires deviennent l'intégrale de chemin. Nous utiliserons l'équation (6.34) pour dériver l'expression de Feynman (6.1).

6.5 Intégrale de chemin

Nous considérons l'expression (6.34) de $K(a, b)$. Nous allons d'abord évaluer le propagateur pour l'évolution pendant le temps infinitésimal ϵ entre les points n et $n + 1$:

$$K(n+1, n) = \langle x_{n+1} | U(t_n + \epsilon, t_n) | x_n \rangle. \quad (6.37)$$

Pour l'hamiltonien (6.2) dépendant du temps l'équation (4.11) n'est pas valable. Toutefois en intégrant $i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_n) = H(t)U(t, t_n)$ et $U(t_n, t_n) = \mathbf{1}$

à des termes en ϵ^2 près, on a

$$U(t_n + \epsilon, t_n) = \mathbf{1} - \frac{iH(t_n)\epsilon}{\hbar} = e^{-iH(t_n)\epsilon/\hbar}. \quad (6.38)$$

Il sera commode d'écrire, toujours à ϵ^2 près,

$$\begin{aligned} U(t_n + \epsilon, t_n) &= \mathbf{1} - \frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar} - \frac{iV(\hat{x}, t_n)\epsilon}{\hbar} = \left(\mathbf{1} - \frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar} \right) \left(\mathbf{1} - \frac{iV(\hat{x}, t_n)\epsilon}{\hbar} \right) \\ &= e^{-i\hat{p}^2\epsilon/2m\hbar} e^{-iV(\hat{x}, t_n)\epsilon/\hbar}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Cette dernière forme présente l'avantage de séparer les opérateurs \hat{p} et \hat{x} tout en préservant l'unitarité de l'opérateur d'évolution. En la portant dans (6.37), on a

$$K(n+1, n) = \underbrace{\langle x_{n+1} | e^{-i\hat{p}^2\epsilon/2m\hbar} | x_n \rangle}_{K_0(x_{n+1}, t_{n+1}, x_n, t_n)} e^{-iV(x_n, t_n)\epsilon/\hbar}. \quad (6.40)$$

Le premier facteur est le propagateur libre donné par (6.21)

$$K(n+1, n) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m(x_{n+1} - x_n)^2}{2\epsilon} - \epsilon V(x_n, t_n) \right]\right). \quad (6.41)$$

L'amplitude de probabilité (6.36) prend la forme

$$\begin{aligned} \phi_N &= \prod_{n=0}^{N-1} K(n+1, n) \\ &= \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon} \right)^{N/2} \exp\left(\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m(x_{n+1} - x_n)^2}{2\epsilon^2} - V(x_n, t_n) \right]\right). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Prenons la limite $\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, les points a et b étant fixes; les divers points x_n forment à la limite un chemin $x_n = q(t_n)$ de b à a ; $\frac{x_{n+1} - x_n}{\epsilon} \rightarrow \dot{q}(t_n)$ est la vitesse de la particule sur ce chemin; la somme sur n tend vers une intégrale $\epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \rightarrow \int_{t_b}^{t_a} dt$; l'exposant dans (6.42) tend vers

$$\frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q(t), t) \right] = \frac{iS[q]}{\hbar} \quad (6.43)$$

où $S[q]$ est l'action le long du chemin $q(t)$.

Pour des expressions du type de (6.34), Feynman définit l'intégrale de chemin d'une fonctionnelle $F[q]$ par la limite

$$\int_b^a \mathcal{D}q F[q] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_1} \int_{x_2} \cdots \int_{x_{N-1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\epsilon} \right)^{N/2} F[q]. \quad (6.44)$$

L'expression (6.34) correspond à la fonctionnelle $F[q] = e^{iS[q]/\hbar}$ et donne dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$K(a, b) = \int_b^a \mathcal{D}q e^{iS[q]/\hbar} \quad (6.45)$$

qui est l'expression présentée dans l'introduction.

Une particule quantique suit tous les chemins possibles pour aller du point b au point a de l'espace-temps. À chaque chemin $q(t)$ est associé une amplitude de probabilité $e^{iS[q]/\hbar}$ où

$$S[q] = \int_{t_b}^{t_a} dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q(t), t) \right] = \int_{t_b}^{t_a} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (6.46)$$

est l'action classique le long du chemin q .

Examinons le passage à la limite classique (cas d'une particule de masse macroscopique). Formellement cette limite s'obtient par $\hbar \rightarrow 0$. Sauf pour le chemin $x = q_0(t)$ qui correspond au principe de moindre action, une petite variation du chemin entraîne une variation de l'action $S[q]$ très grande par rapport à \hbar et le nombre complexe $e^{iS[q]/\hbar}$ décrit un très grand nombre de fois le cercle unité de centre 0. Il s'en suit que l'intégrale sur tous les chemins se réduit en fait à la contribution de la trajectoire classique $x = q_0(t)$. L'amplitude de probabilité pour que la particule suive un autre chemin $x = q_1(t)$ n'est pas nulle mais est annulée par des interférences avec les chemins infiniment voisins de $x = q_1(t)$.

Feynman a développé une approche de la Mécanique Quantique prenant l'intégrale de chemin comme postulat de base. L'équation de Schrödinger en est alors une conséquence. Cette formulation de la Mécanique Quantique est dans un certain sens plus « simple » que la Mécanique Classique. Dans la formulation lagrangienne de la Mécanique Classique, on postule que la trajectoire suivie par la particule vérifie le principe de moindre action. Mais on ne répond pas à la question de pourquoi elle suit la trajectoire de moindre action plutôt qu'une autre. Dans la formulation en intégrale de chemin de la Mécanique Quantique la question ne se pose pas : la particule suit toutes les trajectoires possibles. La théorie quantique justifie le principe de moindre action par passage à la limite classique.

6.6 Diagrammes de Feynman

6.6.1 Méthode perturbative

Supposons que le potentiel $V(\hat{x}, t)$ dans l'hamiltonien (6.2) est comparativement faible par rapport à l'énergie cinétique $\frac{\hat{p}^2}{2m}$. Comme application de l'intégrale de chemin, nous nous proposons d'obtenir le développement

en puissances de V du propagateur

$$K(a, b) = \int_b^a \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x(t), t) \right] dt \right\}. \quad (6.47)$$

On développe en puissances de V :

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} V(x(t), t) dt \right\} &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} V(x(t), t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \left[\int_{t_b}^{t_a} V(x(t), t) dt \right]^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.48)$$

et on porte dans (6.47) pour obtenir :

$$K(a, b) = K^{(0)}(a, b) + K^{(1)}(a, b) + K^{(2)}(a, b) + \dots \quad (6.49)$$

où

$$K^{(0)}(a, b) = \int_b^a \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right\}, \quad (6.50)$$

$$K^{(1)}(a, b) = -\frac{i}{\hbar} \int_b^a \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right\} \int_{t_b}^{t_a} V(x(s), s) ds, \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} K^{(2)}(a, b) &= -\frac{1}{2\hbar^2} \int_b^a \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right\} \\ &\quad \times \int_{t_b}^{t_a} ds \int_{t_b}^{t_a} ds' V(x(s), s) V(x(s'), s'), \end{aligned} \quad (6.52)$$

... (le terme $K^{(n)}$ est d'ordre n en V). Le terme d'ordre 0 est le propagateur libre $K^{(0)}(a, b) = K_0(a, b)$.

6.6.2 Terme $K^{(1)}(a, b)$

On échange l'ordre d'intégration sur le temps s et le chemin $x(t)$:

$$K^{(1)}(a, b) = \int_{t_b}^{t_a} F(s) ds \quad (6.53)$$

où

$$F(s) = \int_b^a \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right\} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) V(x(s), s). \quad (6.54)$$

L'intégrale de chemin $F(s)$ porte sur l'amplitude de la particule libre le long du chemin $x(t)$ (le facteur $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right\}$) multipliée par le facteur

$\left(-\frac{i}{\hbar}\right) V(x(s), s)$ qui ne dépend du chemin $x(t)$ que par la position $x_c = x(s)$ au temps $t_c = s$. Décomposons le chemin $x(t)$ en un chemin $y(t)$ de b à $c = (x_c, t_c)$ et un chemin $z(t)$ de c à a (cf. figure 6.6). L'intégrale sur les chemins $x(t)$ est équivalente à l'intégrale sur les chemins $y(t)$ et $z(t)$ suivie d'une intégrale sur la position x_c :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c \underbrace{\int_c^a \mathcal{D}z(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_c}^{t_a} \frac{m\dot{z}^2}{2} dt \right\}}_{K_0(a,c)} \left[-\frac{i}{\hbar} V(x_c, t_c) \right] \times \underbrace{\int_b^c \mathcal{D}y(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_c} \frac{m\dot{y}^2}{2} dt \right\}}_{K_0(c,b)}. \quad (6.55)$$

Nous avons donc pour le terme $K^{(1)}(a, b)$:

$$K^{(1)}(a, b) = \int_{t_b}^{t_a} dt_c \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c K_0(a, c) \left[-\frac{i}{\hbar} V(x_c, t_c) \right] K_0(c, b). \quad (6.56)$$

Simplifions l'écriture en désignant par $\int d\tau_c$ l'intégrale sur l'espace-temps du point $c = (x_c, t_c)$:

$$\boxed{K^{(1)}(a, b) = \int d\tau_c K_0(a, c) \left[-\frac{i}{\hbar} V(c) \right] K_0(c, b).} \quad (6.57)$$

On peut faire porter l'intégrale sur tous les temps t_c , les limites d'intégration $t_a \geq t_c \geq t_b$ étant automatiquement prises en compte par la présence des propagateurs (ainsi $K_0(a, c) = 0$ si $t_a < t_c$).

6.6.3 Interprétation

Pour interpréter le développement obtenu, appelons *diffusion par le potentiel* l'interaction de la particule avec le potentiel et *amplitude de diffusion par le potentiel par unité de temps et de volume (longueur à 1D)* le terme $-\frac{i}{\hbar} V(c)$.

Le propagateur $K(a, b)$ est la somme des amplitudes des diverses façons dont la particule peut aller de b à a . Les diverses façons sont :

- La particule n'est pas diffusée (terme $K_0(a, b)$) (cf. figure 6.7).
- La particule est diffusée une fois (terme $K^{(1)}(a, b)$). Décrivons un des chemins possibles. La particule se déplace de b à c comme une particule libre ; elle est diffusée par le potentiel au point c ; elle se déplace de c à a comme une particule libre (cf. figure 6.8). L'amplitude de probabilité par unité de temps et de longueur pour ce chemin est le produit

$$K_0(a, c) \left[-\frac{i}{\hbar} V(c) \right] K_0(c, b) \quad (6.58)$$

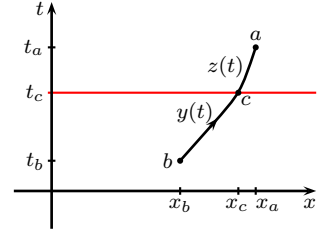


FIG. 6.6 – Décomposition du chemin $x(t)$. On obtient tous les chemins de b à a en composant un chemin $y(t)$ de b à c et un chemin $z(t)$ de c à a pour x_c arbitraire (t_c est fixé).

(règle du produit des amplitudes de probabilité pour des événements successifs). L'équation (6.57) signifie que $K^{(1)}(a, b)$ s'obtient en sommant ces amplitudes pour tous les points c de l'espace-temps.

- La particule est diffusée deux fois (terme $K^{(2)}(a, b)$).
- ...

FIG. 6.7 – La particule n'est pas diffusée.

FIG. 6.8 – La particule est diffusée une fois.

FIG. 6.9 – La particule est diffusée deux fois.

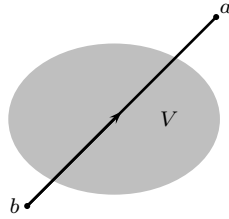


FIG. 6.7.

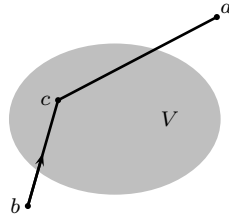


FIG. 6.8.

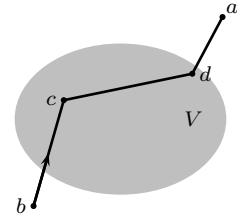


FIG. 6.9.

L'interprétation donnée ci-dessus pour $K^{(1)}(a, b)$ permet d'écrire le terme $K^{(2)}(a, b)$ en considérant les chemins où la particule est diffusée deux fois (cf. figure 6.9). La particule se déplace de b à c comme une particule libre (amplitude de probabilité : $K_0(c, b)$) ; elle est diffusée par le potentiel au point c ($-iV(c)/\hbar$) ; elle se déplace de c à d comme une particule libre ($K_0(d, c)$) ; elle est diffusée par le potentiel au point d ($-iV(d)/\hbar$) ; elle se déplace de d à a comme une particule libre ($K_0(a, d)$). L'expression du terme d'ordre 2 est la somme sur tous les points c et d de l'espace-temps :

$$K^{(2)}(a, b) = \iint d\tau_c d\tau_d K_0(a, d) \left[-\frac{i}{\hbar} V(d) \right] K_0(d, c) \left[-\frac{i}{\hbar} V(c) \right] K_0(c, b). \quad (6.59)$$

Vérifions que cette expression est identique à (6.52). Transformons l'intégrale dans (6.52) :

$$\begin{aligned} & \int_{t_b}^{t_a} ds \int_{t_b}^{t_a} ds' V(x(s), s) V(x(s'), s') \\ &= \int_{t_b}^{t_a} ds \int_s^{t_a} ds' V(x(s), s) V(x(s'), s') + \int_{t_b}^{t_a} ds' \int_{s'}^{t_a} ds V(x(s), s) V(x(s'), s'). \end{aligned} \quad (6.60)$$

FIG. 6.10 – Domaines d'intégration.

Cette relation a été obtenue en séparant le domaine d'intégration de la 1^{re} intégrale (le carré $t_b \leq s \leq t_a$, $t_b \leq s' \leq t_a$) en deux triangles : le triangle 1 ($t_b \leq s \leq s' \leq t_a$) et le triangle 2 ($t_b \leq s' \leq s \leq t_a$) (cf. figure 6.10). Les deux intégrales du second membre de (6.60) sont égales ce qui permet de

récrire (6.52) en faisant disparaître le facteur $\frac{1}{2}$:

$$K^{(2)}(a, b) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_b}^{t_a} dt_c \int_{t_c}^{t_a} dt_d \int_b^a \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \right\} V(c)V(d) \quad (6.61)$$

qui se transforme en (6.59) par la méthode utilisée pour le terme d'ordre 1.

6.6.4 Équation intégrale

Nous avons obtenu le développement

$$K(a, b) = K_0(a, b) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_c K_0(a, c)V(c)K_0(c, b) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \iint d\tau_c d\tau_d K_0(a, c)V(c)K_0(c, d)V(d)K_0(d, b) + \dots \quad (6.62)$$

Remarquer que le facteur $1/n!$ du terme d'ordre n du développement (6.49) y disparaît de la même façon que pour le terme d'ordre 2. En regroupant les termes on a

$$K(a, b) = K_0(a, b) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_c K_0(a, c)V(c) \times \underbrace{\left[K_0(c, b) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_d K_0(c, d)V(d)K_0(d, b) + \dots \right]}_{K(c, b)}. \quad (6.63)$$

Le propagateur vérifie donc l'équation intégrale

$$K(a, b) = K_0(a, b) - \frac{i}{\hbar} \int d\tau_c K_0(a, c)V(c)K(c, b). \quad (6.64)$$

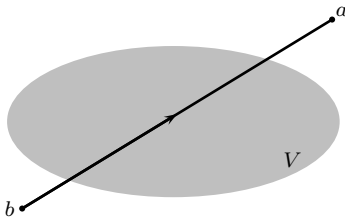


FIG. 6.11.

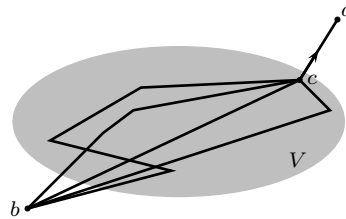


FIG. 6.12.

FIG. 6.11 – La particule se propage de b à a comme une particule libre.

FIG. 6.12 – La particule est diffusée une ou plusieurs fois, la dernière diffusion se produisant au point c .

L'équation (6.64) s'interprète en décomposant le propagateur $K(a, b)$ comme la somme des deux amplitudes de probabilité pour les deux processus suivants.

1. La particule n'est pas diffusée (terme $K_0(a, b)$) (cf. figure 6.11).
2. La particule est diffusée une ou plusieurs fois (cf. figure 6.12). Ce processus est décomposé en trois événements successifs : la particule se déplace de b à c en subissant un nombre quelconque (pouvant être nul) de diffusions (amplitude de probabilité $K(c, b)$) ; la particule est diffusée par le potentiel au point c (densité d'amplitude de probabilité $-iV(c)/\hbar$) ; la particule se déplace de c à a comme une particule libre (amplitude de probabilité $K_0(a, c)$). Le dernier terme de (6.64) s'interprète comme l'amplitude de probabilité de ce processus pour l'ensemble des positions de c .

La série (6.62) est à la base de la théorie des perturbations dépendant du temps en Mécanique Quantique et en Théorie des Champs. Les diagrammes de Feynman (cf. figures 6.7–6.9) décrivent les termes de la série et permettent d'écrire directement, par les *règles de Feynman*, les grandeurs physiques correspondantes.

Exercice 6.1 (Autre méthode pour obtenir l'équation intégrale). Obtenir l'équation intégrale (6.64) à partir de l'équation (4.145).

Annexe A

Corrigé des exercices

1.1 (Le groupe de Lorentz) 1) $G = \tilde{\Lambda}G\Lambda$ ($\tilde{\Lambda}$ désigne la matrice transposée de Λ). En prenant le déterminant de $G = \tilde{\Lambda}G\Lambda$ on obtient $(\det \Lambda)^2 = 1$ d'où $\det \Lambda = \pm 1$.

2) Soit H l'ensemble des matrices réelles 4×4 vérifiant la relation (1.82). Comme $\det \Lambda \neq 0$ pour $\Lambda \in H$ les matrices de H sont inversibles. Pour montrer que H est un sous-groupe des matrices réelles 4×4 inversibles, il suffit de montrer que H est non vide (il contient l'identité I) et que si $M, N \in H$ alors $\Lambda = MN^{-1} \in H$ (ce qui résulte de $G = \tilde{\Lambda}G\Lambda : \widetilde{N^{-1}(MGM)}N^{-1} = \widetilde{N^{-1}GN^{-1}} = G$).

3) L'équation (1.82) exprime que les 4 quadrivecteurs $\vec{\Lambda}_\nu$ forment une tétrade orthonormée : $\vec{\Lambda}_\mu \cdot \vec{\Lambda}_\nu = g_{\mu\nu}$.

4) En multipliant (1.82) par $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\nu\beta}$ on obtient

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \underbrace{g_{\mu\nu} g^{\nu\beta}}_{\delta_\mu^\beta} = \underbrace{\Lambda^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha}_{\delta_\alpha^\rho} \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\rho\sigma} g^{\nu\beta}$$

soit

$$(\Lambda^{-1})^\beta{}_\alpha = \Lambda^\sigma{}_\nu g_{\sigma\alpha} g^{\nu\beta},$$

à comparer à $(R^{-1})^i{}_j = R^j{}_i$ ou $(R^{-1})^i{}_j = R^l{}_k \delta_{jl} \delta^{ik}$ pour une matrice orthogonale.

La relation (1.83) s'écrit en matrice $\Lambda^{-1} = G\tilde{\Lambda}G$, ce qui pouvait s'obtenir directement à partir de $G = \tilde{\Lambda}G\Lambda$ (question 1).

5) La somme dans le second membre de l'équation (1.83) ne contient qu'un terme non nul, celui avec $\sigma = \alpha$ et $\nu = \beta$. On trouve ainsi $(\Lambda^{-1})^0{}_0 = \Lambda^0{}_0 = \gamma$, $(\Lambda^{-1})^0{}_1 = -\Lambda^1{}_0 = \beta\gamma$, ...

6) Pour $\mu = \nu = 0$, l'équation (1.82) donne $1 = g_{00} = \Lambda^\rho{}_0 \Lambda^\sigma{}_0 g_{\rho\sigma} = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 - (\Lambda^2{}_0)^2 - (\Lambda^3{}_0)^2$. D'où $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$.

7) Soit $\Lambda = MN$ le produit de deux matrices de Lorentz. On a $\det \Lambda = (\det M)(\det N)$. L'élément $\Lambda^0{}_0 = M^0{}_\mu N^\mu{}_0$ peut être interprété comme le

produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ des deux vecteurs $a^\mu = g^{\mu\nu} M^0_\nu$ et $b^\mu = N^\mu_0$ de carrés $a^\mu a_\mu = b^\mu b_\mu = 1$. En évaluant ce produit scalaire dans un référentiel K' où $a'^\mu = (a'^0, 0, 0, 0)$ (ce changement de référentiel conserve le signe de la composante temporelle : signe $a^0 = \text{signe } a'^0$) on obtient $\Lambda^0_0 = a'^0 b'^0$ et signe $\Lambda^0_0 = \text{signe } a'^0 b'^0 = \text{signe } a^0 b^0 = (\text{signe } M^0_0)(\text{signe } N^0_0)$.

On en déduit que $(L_+^\uparrow)^{-1} = L_+^\uparrow$, $L_+^\uparrow L_+^\uparrow = L_+^\uparrow$, $L_-^\uparrow = PL_+^\uparrow$, $L_-^\downarrow = TL_+^\uparrow$ et $L_+^\downarrow = TPL_+^\uparrow$. Chacun des sous-ensembles \mathcal{G} du groupe de Lorentz envisagés en a-d vérifient $\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1} \subseteq \mathcal{G}$: ce sont bien des sous-groupes.

Nota : Dans le changement de référentiel (1.31) nous nous sommes limités aux transformations telles qu'il existe une suite de référentiels $K(s)$ pour $s \in [0, 1]$ qui permet de passer continûment du référentiel $K = K(0)$ au référentiel $K' = K(1)$. Les matrices Λ correspondantes appartiennent au groupe de Lorentz restreint L_+^\uparrow . On peut montrer (c'est assez compliqué), inversement, que pour chaque matrice $\Lambda \in L_+^\uparrow$ il existe un tel changement de référentiel (il y en a une infinité si on tient compte du terme non-homogène a^μ dans (1.31)). Les nappes de la table 1.1 sont les composantes connexes du groupe de Lorentz.

1.2 $g_\alpha^\beta = g^\beta_\alpha = \delta_\alpha^\beta$ et $g^{\alpha\beta}$. On peut ainsi noter le tenseur métrique par le symbole δ : $\delta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

3.1 On retrouve la pression électrostatique $\vec{df} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \vec{dS}$.

6.1 (Autre méthode pour obtenir l'équation intégrale)

Multiplier l'équation (4.145) à gauche par $U_0(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} \underbrace{U_0(t, t_0) U_I(t, t_0)}_{U(t, t_0)} &= U_0(t, t_0) \\ &- \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \underbrace{U_0(t, t') U_0(t', t_0)}_{U_0(t, t_0)} \underbrace{U_0^{-1}(t', t_0) H_{\text{int}} U_0(t', t_0) U_I(t', t_0)}_{H_{I, \text{int}}(t')} dt' \\ &= U_0(t, t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t U_0(t, t') H_{\text{int}} U(t', t_0) dt'. \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

On retrouve (6.64) en changeant $t \rightarrow t_a$, $t_0 \rightarrow t_b$, $t' \rightarrow t_c$,

$$H_{\text{int}} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c |x_c\rangle H_{\text{int}}(c) \langle x_c|$$

et en prenant l'élément de matrice entre $\langle x_a|$ et $|x_b\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x_a | U(t_a, t_b) | x_b \rangle &= \langle x_a | U_0(t_a, t_b) | x_b \rangle \\ &- \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} dt_c \int_{-\infty}^{+\infty} dx_c \langle x_a | U_0(t_a, t_c) | x_c \rangle H_{\text{int}}(c) \langle x_c | U(t_c, t_b) | x_b \rangle. \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Annexe B

Bibliographie

On conseille de compléter ce cours par la lecture des chapitres 11 et 12 du livre de Jackson [1].

Révision des équations de Maxwell: [1, 2] ([2] et les anciennes éditions de [1] utilisent le système d'unités de Gauss (cgs)).

Révision de la théorie de la relativité restreinte et des transformations de Lorentz: [1, 3, 2]. Les chapitres 1–4 du livre de Schutz [3] sont particulièrement recommandés. On peut aussi lire l'article d'Einstein [4], qui est traduit en anglais et accompagné d'explications et de considérations historiques dans [5].

Une référence pour le chapitre 4 est le livre de Cohen-Tannoudji et al [6].

La formulation de la Mécanique Quantique par l'intégrale de chemin est exposée dans le livre classique de Feynman et Hibbs [7].

Références

- [1] J. D. Jackson, « Électrodynamique classique », (Paris : Dunod, 2001), traduction française de “Classical electrodynamics, 3rd edition” (New York : John Wiley & Sons, 1999) 133
- [2] L. Landau et E. Lifchitz « Théorie du champ », (Moscou : Mir, 1966) 133
- [3] B. F. Schutz “A first course in general relativity”, (UK : Cambridge University Press, 1985) 133
- [4] A. Einstein “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Ann. Phys.* **17**, 891–921 (1905) 12, 133
- [5] A. I. Miller, “Albert Einstein’s special theory of relativity”, (New York : Springer 1998) 133
- [6] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg « Photons et atomes. Introduction à l’électrodynamique quantique », (Paris : Inter-Éditions et Éditions du CNRS 1987) 133
- [7] R. P. Feynman & A. R. Hibbs, “Quantum Mechanics and Path Integrals”, (New York : McGraw-Hill 1965) 133

Index

Symboles

$A_{\text{ret}}^\mu(\vec{x})$ Quadripotentiel retardé 103
 $F_{\mu\nu}$ Tenseur du champ
 électromagnétique 34
 $G_+(\vec{x})$ Fonction de Green
 retardée 101
 $G_-(\vec{x})$ Fonction de Green
 avancée 101
 H Hamiltonien 44
 $K(a, b)$ Propagateur 117
 L Lagrangien 40
 S Action 40
 $T^{\mu\nu}$ Tenseur énergie-impulsion 59
 $T_{(M)}^{ij}$ Tenseur des contraintes de
 Maxwell 66
 $T_a^{\mu\nu}$ Tenseur énergie-impulsion
 d'une particule 63
 $T_{\text{can}}^{\mu\nu}$ Tenseur énergie-impulsion
 canonique 68
 $T_{\text{champ}}^{\mu\nu}$ Tenseur énergie-impulsion
 du champ 65
 $U(t, t_0)$ Opérateur d'évolution 72
 $\Lambda^\mu{}_\nu$ Matrice de Lorentz . . 13–15,
 26
 $\beta = V/c$ 14
 \square D'Alembertien 10, 30
 $\delta^\nu{}_\mu$ Delta de Kronecker 16
 $\delta^{(4)}(\vec{x})$ Fonction de Dirac 32
 ϵ_0 Permittivité électrique 8
 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ 14
 $\int \mathcal{D}q$ Intégrale de chemin 124
 μ_0 Perméabilité magnétique 8
 ∂^μ Quadrigradient 29
 ρ Densité de charge 7

σ^{ij} Tenseur des contraintes 61
 \star Opérateur de Hodge 28, 34
 $\theta(x)$ Fonction de Heaviside 101
 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ Tenseur de Levi-Civita 28
 \vec{J} Densité de courant 7
 \vec{S} Courant d'énergie 61, 66
 \vec{e}_μ Tétrade 16
 \vec{g} Densité de quantité de
 mouvement 59, 66
 a Opérateur destruction 73
 a^\dagger Opérateur création 73
 c Vitesse de la lumière 8
 $g_{\mu\nu}$ Tenseur métrique 20
 j^μ Quadricourant 19
 u Densité d'énergie 59, 66
 e^μ Base duale 21
 \mathcal{H} Densité hamiltonienne 47
 \mathcal{L} Densité lagrangienne 46
 $\star F_{\mu\nu}$ Tenseur dual 34
 1-forme 21
 interprétation
 géométrique 30
 4-vecteur 15

A

Abaisser les indices 27
 Action 40, 125
 D'ALEMBERT 10
 Algèbre tensorielle 24
 Amplitude
 de diffusion 127
 de probabilité 117
 de transition 95
 Application linéaire 25
 Approximation dipolaire
 électrique 97, 114

B

Base
 duale 21
 orthonormée 20
Bidual 22
BOHR 97
BOSE 74
Boson 74, 88
Bra 21
BROGLIE 122

C

Calcul tensoriel 25
Carré (d'un quadrivecteur) ... 20
Champ
 d'une charge ponctuelle
 en mouvement . 103–109
 de quadrivecteurs 19
 électromagnétique
 invariants 35
 transformation 35
 tenseur 34–39
 longitudinal 77
 solénoïdal 77
 transverse 77
Charge 7, 18
 champ d'une 103–109
 de Noether 70
COHEN-TANNOUJJI 134
Composantes d'un tenseur 21, 23
Conditions aux limites
 périodiques 78
Cône de lumière 17
Constante de structure fine .. 97
Contraction
 de Lorentz-
 FitzGerald 18–19
 des indices 22, 23, 25
Contravariant 22
Convention d'Einstein 11
Convolution 99
COULOMB 8
 condition de 9, 33, 80
 jauge de 9, 10, 33, 71, 76, 77

Courant 7, 18
 d'énergie 61, 66
 de Noether 69
 de quantité de
 mouvement 61, 66
Covariant 22
 écriture 12
 forme 12
Covecteur 21

D

D'ALEMBERT 10
D'Alembertien \square 10, 30
Décomposition spectrale 109
 \vec{A} 111
 \vec{E} et \vec{B} 109
 énergie rayonnée 112
Delta de Kronecker 16
Densité
 d'énergie 59, 66
 de charge 7, 18, 62
 de courant 7, 18, 62
 hamiltonienne 47, 48
 lagrangienne 46
 quantité de mouvement . 59,
 66
Déplacement (quadrivecteur) . 15
Dérivée
 d'Euler-Lagrange 41
 fonctionnelle 41, 51–55
DESCARTES 91
Diagrammes de Feynman 96,
 125–130
Diffusion par un potentiel ... 127
DIRAC 32
 fonction de 32
Dual 21
DUPONT-ROC 134

E
Écriture covariante 12
EINSTEIN 11–13, 134
 convention d' 11
 postulats 13

- principe de relativité d' .. 13
- Émission spontanée 93–98
- Énergie
 - courant d' 61, 66
 - coulombienne 78
 - densité d' 59, 66
 - rayonnée 112
- Équation
 - d'Euler-Lagrange 41, 47–48, 76
 - de continuité 7, 29
 - de Hamilton 45, 71, 73
 - de Klein-Gordon 53
 - de Newton 42
 - de Poisson 9, 77, 103
- Espace
 - de Fock 87
 - de Minkowski 20
 - des états 87
 - dual 21
- États de Fock 87
- EUCLIDE 28
- EULER 41
 - équation d'Euler-Lagrange . 41, 47–48, 76
 - dérivée d'Euler-Lagrange 41
- Événement 11
- F**
- FARADAY 13
 - loi de 13
 - tenseur de 34
- FERMI 88
 - règle d'or 93, 96
- Fermion 88
- FEYNMAN 96, 134
 - diagrammes (ou graphes) de 96, 125–130
 - intégrales de chemin 117–130
- FITZGERALD 18
 - contraction de Lorentz-FitzGerald 18–19
- Flux d'un quadrivecteur 56
- FOCK 87
 - états de 87
- Fonction
 - d'onde d'un photon .. 88–89
 - de Dirac 32
 - de Green 99–102, 119
 - de Heaviside 101
- Fonctionnelle
 - dérivée 51–55
 - intégrale de chemin 124
- Force de Lorentz 8, 37
- Forme linéaire 21
 - N -forme 23
 - interprétation géométrique 30
- Formule de Larmor 107–109
- FOURIER 53, 79, 109, 113
- FRAUNHOFER 112
- G**
- GALILÉE 11
- GAUSS
 - intégrale gaussienne 120
 - système d'unités de 8
 - théorème de 57
- GORDON 53
 - Équation de Klein-Gordon 53
- Gradient 29
 - interprétation géométrique 30
- Graphes de Feynman ... 96, 125–130
- GREEN 99
 - fonction de 99–102, 119
- Groupe de Lorentz .. 13, 26, 131
 - orthochrone 27
 - restreint 27
- GRYNBERG 134
- H**
- HAMILTON 44
 - équation de 45, 71, 73
- Hamiltonien 44, 47, 67
 - champ + particules .. 86, 93

- champ libre 82–85
 densité 47, 48, 68
 oscillateur harmonique .. 71,
 73
 HEAVISIDE 101
 fonction de 101
 HEISENBERG 72, 117
 point de vue (ou représentation) de 72–73, 85–86, 93
 Hélicité 92
 HERMITE 72
 HIBBS 134
 HILBERT 72
 HODGE 28
- I**
- Identité
 de Parseval 79
 de Plancherel 79
- Indice
 monter et abaisser 27
 répété 11
- Intégrale
 à 4D 31
 de chemin 117–130
 gaussienne 120
- Intégration par parties 32
- Intervalle 16
 de genre espace 17
 de genre temps 17
 nul 17
- Invariance
 d^4x 31
 de jauge 9, 33
 des tenseurs 21
- Invariant 12, 56–58
 de Galilée 12
 de Lorentz 13
 du champ électromagnétique
 35
 flux 56
 fonction de Dirac 32
 quadrivecteur 58
 scalaire 58
- tenseur 58
- J**
- JACKSON 134
- Jauge
 de Coulomb 9–10, 71, 76, 77
 de Lorenz . 9–10, 33, 77, 102
 invariance de 9, 33
- K**
- Ket 21
- KLEIN 53
 Équation de
 Klein-Gordon 53
- KRONECKER 16
 delta de 16
- L**
- LAGRANGE 40
 équation d'Euler-
 Lagrange . 41, 47–48, 76
 dérivée d'Euler-Lagrange 41
- Lagrangien 40
 champ + N particules ... 75
 champ
 électromagnétique 48–50
 charge ponctuelle non
 relativiste 41
 charge ponctuelle relativiste
 43
 corde 45
 densité 46
 oscillateur harmonique ... 71
 particule relativiste libre . 42
- LANDAU 134
- LAPLACE 10
- LARMOR 108
 formule de 107–109
- LEVI-CIVITA 28
 tenseur de 28
- LIÉNARD 105
 potentiels de Liénard-
 Wiechert 103–105
- LIFCHITZ 134
- Ligne d'univers 17

- Loi
 de composition
 opérateur d'évolution .. 72
 propagateur 122
 de Faraday 13
 Longitudinal, champ 77
 LORENTZ 8, 9
 contraction de Lorentz-
 FitzGerald 18–19
 force de 8, 37
 groupe de 13, 26, 131
 matrice $\Lambda^\mu{}_\nu$ 13, 26
 transformations de ... 13–15
 homogène 13
 inhomogène 13
 LORENZ 9
 condition de .. 9, 33, 77, 102
 jauge de ... 9–10, 33, 77, 102
- M**
 MACH 11
 principe de 11
 Matrice
 de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ 13, 26
 MAXWELL 7
 équations de 7, 133
 forme covariante 36
 tenseur des
 contraintes 66–67
 MILLER 134
 MINKOWSKI 20
 espace de 20
 Modes normaux 83
 développement en 85
 Moment
 canonique conjugué .. 41–43
 cinétique 59, 92
 Monter les indices 27
- N**
 N-forme 23
 NEWTON 11
 équations de 42
 NEWTON, T. D. 89
- théorème de Newton
 et Wigner 89
 NOETHER 69
 charge de 70
 courant de 69
 théorème de 68–70
- O**
 Observateur inertiel 11
 Opérateur
 création 73
 d'évolution 72
 de Hodge 28, 34
 destruction 73
 du point de vue de
 Heisenberg 85
 hermitique 72
 quantité de mouvement . 90,
 91
 Oscillateur harmonique ... 71–75
 lagrangien 71
 hamiltonien 71
- P**
 PARSEVAL 79
 identité de 79
 Perméabilité magnétique 8
 Permittivité électrique 8
 Photon 87–89
 hélicité 92
 polarisation 92
 quantité de mouvement .. 91
 spin 91–92
 PLANCHEREL 79
 identité de 79
 POINCARÉ 13
 transformations de 13
 Point de vue
 d'interaction 93
 de Heisenberg 72–73, 85–86,
 93
 de Schrodinger 72
 POISSON 9
 équation de 9, 77, 103

- Polarisation 92
 Position retardée 104
 Potentiel 8–10, 33
 de Liénard-Wiechert 103–105
 retardé 102
 scalaire 9
 vecteur 9, 80
 POYNTING 66
 théorème de 66
 vecteur de 66, 112, 113
 Principe
 de Mach 11
 de moindre action ... 40, 125
 de relativité 11
 Produit
 scalaire 20
 tensoriel 23
 vectoriel 28
 Propagateur 117
 d'une particule libre 119–122
 définition 118
 équation différentielle ... 118
 équation intégrale 129
 loi de composition 122
- Q**
 Quadricourant 18, 62
 Quadridivergence 29
 nulle 57
 Quadriforce 39
 Quadrigradient 29
 interprétation
 géométrique 30
 Quadriimpulsion 18
 Quadripotentiel 33, 38
 Quadrivecteur 15
 flux 56
 Quadrivitesse 17
 Quantification canonique . 72, 83
 champ 76
 Quantité de mouvement
 courant de 61, 66
 densité de 59, 66
 opérateur 90
 photon 91
- R**
 Rayonnement 99–116
 d'une charge
 ponctuelle 103–109
 décomposition
 spectrale 109–116
 énergie 112
 zone 110
 Référentiel
 comobile 17
 d'inertie 11
 galiléen 11
 Règle d'or de Fermi 93, 96
 Relation de commutation 72, 73,
 86
 Représentation
 d'interaction 93
 de Heisenberg 72–73, 85–86,
 93
 de Schrodinger 72
- S**
 SCHRÖDINGER 72
 point de vue (ou
 représentation) de ... 72
 SCHUTZ 134
 Solénoïdal, champ 77
 Source périodique 113–116
 Spin 91–92
 Système d'unités
 de Gauss 8
 international (S.I.) 8
- T**
 Taux de transition 96
 Temps
 propre 17
 retardé 104
 Tenseur 21–28
 N-forme 23
 algèbre tensorielle 24
 antisymétrique 23
 calcul tensoriel 25

composantes 23
 contravariant 24
 covariant 23
 de Faraday 34
 de Levi-Civita 28
 de Maxwell 66–67
 des contraintes 61
 du champ
 électromagnétique 34–39
 dual $\star F_{\mu\nu}$ 34
 énergie-impulsion 58–68
 canonique 67
 d'une particule 62
 des particules 64
 du champ 65
 du champ rayonné 107
 invariance 21
 métrique 20, 26
 mixte 24
 symétrique 23
 Tétrade 16
 Théorème
 de Gauss 57
 de Newton et Wigner 89
 de Noether 68–70
 de Poynting 66
 Transformation
 de jauge du lagrangien ... 44
 de Lorentz 13–15
 homogène 13
 inhomogène 13
 de Poincaré 13
 du champ
 électromagnétique ... 35
 galiléenne 11
 spéciale 14
 Transverse, champ 77

V

Vecteur

4-vecteur 15
 contravariant 15
 covariant 21
 de Poynting 66, 112, 113

Vitesse de la lumière 8, 13

W

WIECHERT 105
 potentiels de Liénard-
 Wiechert 103–105
 WIGNER 89
 théorème de Newton
 et Wigner 89

Z

Zone de rayonnement 110